I. megoldás. Láttuk, hogy a felírt sorokban az egyenlőségi jel előtti négyzetszámok alapjai sorról sorra 4-gyel többel nőnek. Az 1. sorról a 2.-ra a növekedés $8 = 2 \cdot 4$, így az $n-1$-edik sorról az n-edikre $n \cdot 4$. Így az várható, hogy az n-edik sor középső négyzetszámának az alapja

$$4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = \frac{(4+4n)n}{2} = 2n^2 + 2n$$

lesz, a sor kezdő tagjának alapja $2n^2 + n$, utolsó tagjáé $2n^2 + 3n$. Így a táblázat kérdéses sora csak ez lehet:

$$\begin{gathered}(2n^2+n)^2 + (2n^2+n+1)^2 + \ldots + (2n^2+2n)^2 = \\ = (2n^2+2n+1)^2 + (2n^2+2n+2)^2 + \ldots + (2n^2+3n)^2.\end{gathered}$$

A két oldal egyenlőségének bizonyításához felhasználjuk, hogy az 1-től k-ig terjedő egész számok négyzeteinek $S(k)$ összege

$$S(k) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

A bal oldal értéke két ilyen összeg különbségeként számítható:

$$\begin{gathered}S(2n^2+2n) - S(2n^2+n-1) = \\ = \frac{(2n^2+2n)(2n^2+2n+1)(4n^2+4n+1)}{6} - \frac{(2n^2+n-1)(2n^2+n)(4n^2+2n-1)}{6}.\end{gathered}$$

Egyes tényezőket szorzattá alakítva, majd kiemeléssel és polinommá alakítással:

$$\begin{gathered}= \frac{1}{6}\Big[2n(n+1)(2n^2+2n+1)(2n+1)^2 - (2n-1)(n+1)n(2n+1)(4n^2+2n-1)\Big] = \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\big[(8n^3+12n^2+8n+2) - (8n^3-4n+1)\big] = \\ = S(n)\cdot(12n^2+12n+1).\end{gathered}$$

Hasonlóan a jobb oldal:

$$\begin{gathered}S(2n^2+3n) - S(2n^2+2n) = \frac{1}{6}\big[(2n^2+3n)(2n^2+3n+1)(4n^2+6n+1) - \\ -(2n^2+2n)(2n^2+2n+1)(4n^2+4n+1)\big] = \\ = \frac{1}{6}\Big[n(2n+3)(2n+1)(n+1)(4n^2+6n+1) - 2n(n+1)(2n^2+2n+1)(2n+1)^2\Big] = \\ = S(n)\cdot\big[(8n^3+24n^2+20n+3) - (8n^3+12n^2+8n+2)\big] = \\ = S(n)\cdot(12n^2+12n+1),\end{gathered}$$

vagyis valóban egyenlő a bal oldallal.

Minárik László (Tamási, Béri Balogh Á. g. IV. o. t.)

II. megoldás. A táblázat számainak szabályszerűségeire nem tekintve az n-edik sor középső (vagy kezdő-, vagy záró) tagját meghatározhatjuk egyenlettel is. Pl. az x^2 középső tagra – amely előtt is, utána is n tag áll – teljesülnie kell az

$$(x-n)^2 + (x-n+1)^2 + \ldots + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+n)^2$$

egyenletnek. Látható előre, hogy kifejtés után az x-től független tagok kiesnek:

$$x^2 - 2x\big[n + (n-1) + \ldots + 1\big] = 2x\big[1 + 2 + \ldots + (n-1) + n\big].$$

Az egyik gyök 0, érdektelen, a másik pedig

$$x = 2 \cdot 2(1 + 2 + \ldots + n) = 2n^2 + 2n.$$

Itt nincs szükség annak bizonyítására, hogy az egyenlőség fennáll. Csak azt mutatjuk meg, hogy $n = 1, 2, 3, 4$-re az előre felírt sorokat kapjuk. x értéke rendre $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$, ill. 12, ill. 24, ill. 40.

Barth Albert (Budapest, Madách I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A felírt n-edik sor helyességét úgy is bizonyíthatjuk, hogy a bal oldal tagjait az első kivételével átvisszük a jobb oldalra és rendre levonjuk az ott álló tagokból. Az így adódó négyzetkülönbségeket szorzattá alakítva

az alapok különbsége mindig n, az alapok összegei pedig számtani sorozatot alkotnak:

$$\begin{gathered}\left[(2n^2+2n+1)^2-(2n^2+n+1)^2\right]+\left[(2n^2+2n+2)^2-\right.\\ \left.-(2n^2+n+2)^2\right]+\ldots+\left[(2n^2+3n)^2-(2n^2+2n)^2\right]=\\ =n\left[(4n^2+3n+2)+(4n^2+3n+4)+\ldots+(4n^2+5n)\right]=\\ =n\cdot n(4n^2+4n+1)=n^2(2n+1)^2=(2n^2+n)^2,\end{gathered}$$

vagyis a jobb oldal egyenlő a bal oldalon hagyott egyetlen taggal.

Berecz Ágota (Makó, József A. g. III. o. t.)

2. A táblázat adott sorainak első, ill. utolsó alapszámát szorzattá alakítva is kaphatunk sejtést az n-edik sor kezdő, ill. záró alapszámára:

$$\begin{gathered}1\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 7,\ 4\cdot 9,\quad \text{általában}\quad n(2n+1),\quad \text{ill.}\\ 1\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ 3\cdot 9,\ 4\cdot 11,\quad \text{általában}\quad n(2n+3).\end{gathered}$$

(A középső tag többféleképpen bontható.)

Illi József (Szigetvár, Zrinyi M. g. IV. o. t.)