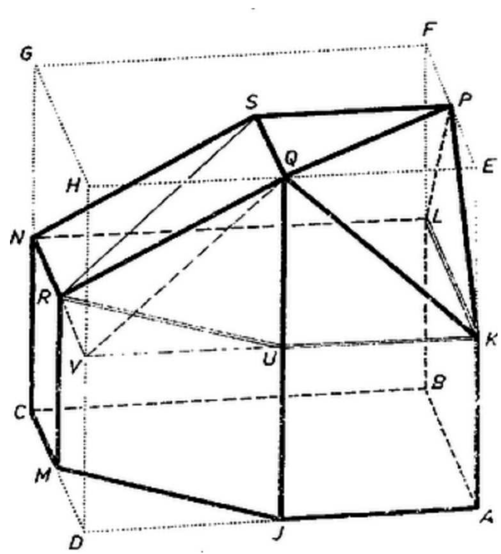
Legyen a felsorolt 7 él felező pontja rendre J, K, L, M, N, P, Q, továbbá a $CDHG$ és az $EFGH$ lap középpontja R, ill. S. Határozzuk meg sorra a T test határlapjainak a területét. Jelöljük a kocka élhosszúságát c-vel.



Az $ABCMJ$ alaplap az alapnégyzetből egy $c/2$ befogójú egyenlő, szárú derékszögű háromszög elhagyásával keletkezett – jelöljünk egy ilyen háromszöget H_0-lal –, a PQS fedőlap viszont éppen egy ilyen H_0 háromszög. A kettő területe együtt tehát a négyzet területével egyenlő.

Hasonlóan az $ABLPK$ és $CNRM$ lapok együttes területe egy kockalap területével egyenlő, mert az előbbi a kocka egy lapjából két H_0 háromszög elhagyásával keletkezett, az utóbbi viszont két ilyen háromszögre bontható szét.

A $BCNL$ téglalap egy kockalap fele, az $AJQK$ trapéz pedig egy félnégyzetből egy H_0 háromszög elhagyásával keletkezik. Mivel a H_0 háromszög területe egy kockalap nyolcadrésze, így az eddig leírt lapok együttes felszíne $(3-1/8)c^2 = 23c^2/8$.

A J, M, R, Q pontok egy síkban vannak, trapézt alkotnak, mert $MR \parallel JQ$, és ezzel egybevágó trapézt határoznak meg az L, P, S, N pontok, mivel $LN \parallel PS$, továbbá $LN = JQ = c$, $PS = MR = c/2$, végül az LP, ill. JM oldal merőleges a párhuzamos oldalakra és mindkettő egy H_0 háromszög átfogója, tehát hossza $c/\sqrt{2}$. A két trapéz területének összege tehát $(3/2)\ c \cdot c/\sqrt{2} = 3c^2/2\sqrt{2}$.

Az N, R, Q, S pontok egy paralelogrammát határoznak meg, mert $RN \parallel SQ$, és mindkettő hossza $c/2$. A paralelogramma egyik magassága RS, mert benne van az M, R, S, P pontokon átmenő, a kockát felező síkban, RN és SQ pedig merőleges erre a síkra. $RS = c/\sqrt{2}$, a paralelogramma területe tehát $c^2/2\sqrt{2}$.

Végül még hátra van a KPQ háromszög, mely szabályos, oldalainak hossza $c/\sqrt{2}$, így területe $c^2\sqrt{3}/8$.

Eredményeinket összegezve T felszíne

$$f = \frac{c^2}{8}\left(23 + 8\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \approx 4{,}506c^2.$$

A térfogat kiszámítása céljára messük el a testet a KLN síkkal, ez átmegy R-en és felezi a JQ élt U-ban. T alsó része ötoldalú hasáb, ennek térfogata – az $ABCMJ$ alaplap területének felhasználásával $T_1 = 7c^3/16$. T felső részét négyoldalú csonkagúlává egészíthetjük ki, ha hozzávesszük az $EPQK$ és $RUVQ$ gúlákat, ahol V a DH él felezőpontja. Így térfogata

$$T_2 = \frac{c}{6}\left(c^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2}\right) - 2\frac{c}{6}\cdot\frac{c^2}{8} = \frac{c^3}{4},$$

és a teljes térfogat $11c^3/16$.

A K, L, N, ill. R pontokból P, Q, S-be futó átlóknál az A, B, C, ill. M-ből ugyanoda futó átló hosszabb, így a leghosszabb átló, vagy átlók egyik végpontját az alaplapon kell keresnünk. A $BDHF$ sík két oldalán levő csúcsokat nézve az AN, CK, CP, CQ átlók jönnek tekintetbe, mindegyik hossza $3c/2$; a $MRSP$ sík két oldalán levő csúcsokat tekintve pedig ismét AN, CK, CQ, továbbá BQ, és az utóbbi hossza is $3c/2$. A számítás azt mutatja, hogy nincs a mondott 5 egyenlő hosszú átlónál hosszabb testátló.

Vadász Péter(Budapest, Kölcsey F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A térfogat kiszámításához T-nek számos más felbontása is szerepelt a dolgozatokban. Egy gépies, de jól áttekinthető felbontás az AB, AD és AE élek felező merőleges síkjával a kockát nyolc $c/2$ élű kockára darabolta és T-nek ezekbe eső részét számította.