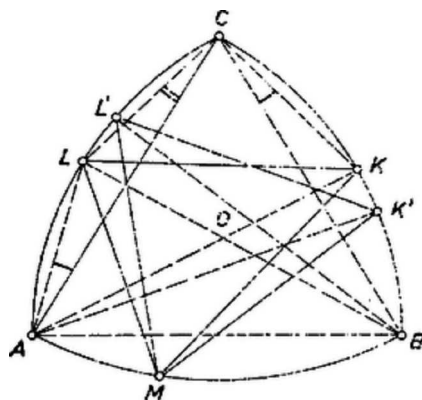


1. Elég belátnunk, hogy a BC , CA , ill. AB körívből vett BK , CL , ill. AM rész-ívek egyenlők. Így ugyanis az ABC háromszög O középpontja körüli bármelyik irányú 120° -os forgás az AB , BC , CA ívekkel együtt a KLM egyenlő oldalú háromszög csúcsait is egymásba viszi át, tehát O egyszersmind a KLM háromszögnek is középpontja.



1. ábra

Mérjük rá evégett az AM ívet a BC és a CA ívre B -től, ill. C -től, és legyen a végpont K' , ill. L' ; így azt kell belátnunk, hogy $K' \equiv K$ és $L' \equiv L$. Az $MK'L'$ háromszög szabályos, mert a mondott forgások önmagába viszik át.¹ Ha K' nem azonos K -val, akkor a BC íven B -től C -ig haladva vagy előzi K -t, vagy követi. Továbbmenve a CA íven A -ig, L' ugyanúgy előzi vagy követi L -t, mert a BC , CA ívpárt befutó ponthoz M -ből húzott látósugár végig egy irányban fordul el M körül, másrészt viszont a $K'ML \angle = 60^\circ = KML \angle$. Ha már most a BK' ív kisebb a BK ívnél, akkor

$$MK' < MK,$$

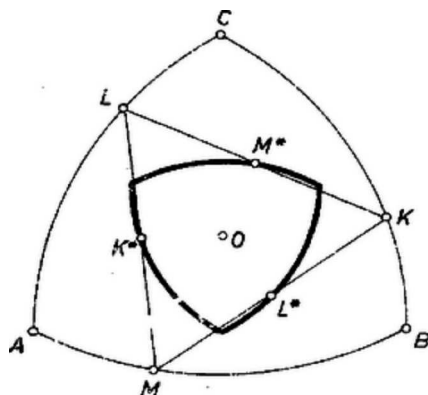
mert a KK' szakasz felező merőlegese átmegy A -n, M pedig ugyanarra a partjára esik, mint K' . Hasonlóan adódik

$$ML' > ML.$$

E két, egyenlőtlenség azonban együtt nem teljesülhet, mert a megfelelő oldalakon egyenlő szakaszok állnak.

Ugyanígy a $BK' > BK$ feltevés is ellentmondásra vezet. Ezek szerint K' nem lehet K -tól különböző, egyszersmind L' is azonos L -vel, ebből pedig – mint láttuk – az állítás első része következik.

2. Azt kell megmutatnunk, hogy a KCL szög, vagyis a KCB , BCA és ACL szögek összege, 90° -kal egyenlő, más szóval, hogy $KCB \angle + ACL \angle = 30^\circ$. Az előbbi a (rövidebb) KB köríven nyugvó kerületi szög, az utóbbi egy ugyanakkora sugarú kör AL íven nyugszik. Mivel beláttuk, hogy utóbbi egyenlő a CL ívvel, ez pedig KB -vel együtt egy hatod kört alkot, így a rajtuk nyugvó kerületi szögek összege 180° hatodrészével, 30° -kal egyenlő, az állításnak megfelelően.



2. ábra

3. Legyenek a KLM háromszög oldalainak felezőpontjai rendre M^* , K^* , L^* . Az ezekkel meghatározott (szabályos) háromszög hasonló helyzetű az MKL háromszöghöz, az MM^* , KK^* , LL^* egyenesek közös pontjára, az MKL háromszög O középpontjára nézve, ennél fogva az B^* , K^* , L^* pontok mértani helye hasonló az M , K , L pontok mértani helyéhez, az AB , BC , CA ívek együtteséhez. (A hasonlóság aránya 1: 2.) Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Gerencsér László (Budapest, Rákóczi F. g.)

¹Lásd 1167. feladat, K.M.L. 26 (1963/1) 21. old.