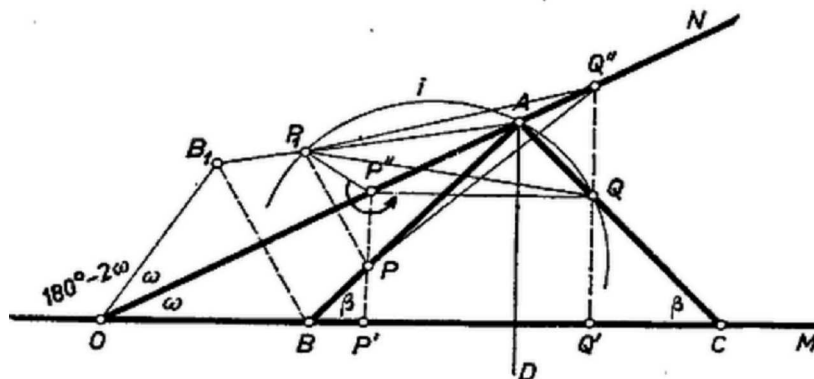


I. megoldás. Legyen az adott szög $\angle MON = \omega < 90^\circ$, a feltételnek megfelelő ABC egyenlő szárú háromszög BC alapja legyen az OM száron, B közelebb O -hoz, az A csúcs az ON száron; az AB száron fekvő adott pont legyen P , az AC -n fekvő Q .



1. ábra

A háromszög egyenlő szárú voltából következik, hogy $\beta = \angle ABC = \angle ACB$ és $\angle OBA = 180^\circ - \beta$. Ábránkat úgy alakíthatjuk át, hogy az utóbbi két szög, melyek összege 180° , egy négyszög két szögébe menjen át, s így a másik két szög között is összefüggést állapíthatunk meg. Tükrözzük B -t AO -ra, legyen a tükröképe B_1 . Ekkor az AB_1OC négyszög C -nél, O -nál, ill. B_1 -nél levő szöge β , 2ω , ill. $180^\circ - \beta$ s így az A -nál levő szög $180^\circ - 2\omega$, ami az adatokból megszerkeszthető. Ennek a szögnek AC szárá átmegy Q -n, az AB_1 szár pedig átmegy P -nek az OA -ra vonatkozó P_1 tükröképén.

Ezek szerint A -t ON -ből a P_1Q szakasz fölé írt $180^\circ - 2\omega$ nyílású i látószöggörív metszi ki, B -t és C -t pedig AP , ill. AQ metszi ki OM -ből.

Az ABC háromszög megfelel a követelményeknek, mert a PAQ szög felezőjének egy pontját D -vel jelölve

$$\begin{aligned} \angle DAO &= \angle PAO + \frac{\angle QAP}{2} = \frac{\angle PAO + (\angle PAO + \angle QAP)}{2} = \\ &= \frac{\angle P_1AO + \angle QAO}{2} = \frac{\angle P_1AQ}{2} = 90^\circ - \omega, \end{aligned}$$

tehát $AD \perp OM$, vagyis $AD \perp BC$, az ABC háromszög egyenlő szárú.

ω hegyes szög, ezért a P_1AQ szög 0° és 180° közé esik. Így az i ív a P_1Q egyenesnek O -val ellentétes partján szerkesztendő, ugyanis O benne van a 180° -nál kisebb P_1AQ szög terében. i mindig metszi az ON félegyenest, mert végpontjait ON szétválasztja, ugyanezért mindig pontosan egy metszéspontot kapunk A céljára.

A mindig a P és Q -n át OM -re állított merőlegesnek ON -nel való P'' , Q'' metszéspontjai között adódik, tehát mindig megfelelő háromszöget kapunk. Ugyanis P_1Q -nak Q'' -ből vett látószöge kisebb a P_1AQ szögnél, P'' -ből vett látószöge pedig nagyobb nála. (Az utóbbi esetben azt a szögtartományt értjük a látószögön, amelynek O belső pontja.) Valóban

$$\begin{aligned} \angle P_1Q''Q &= \angle P_1Q''O + \angle OQ''Q = \angle PQ''O + \angle QQ''O < 2\angle QQ''O = \\ &= 2(90^\circ - \omega) = \angle P_1AQ, \end{aligned}$$

mert feltevésünk szerint P benne van az $OQ'Q''$ háromszögben. Másrészt ugyanezért

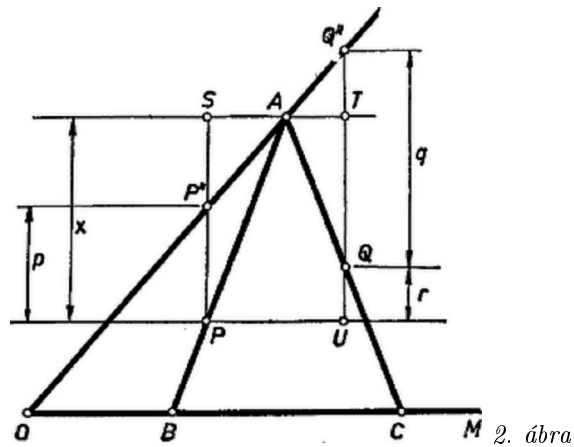
$$\angle P_1P''Q = \angle P_1P''P + \angle PP''Q > \angle P_1P''P = 2\angle OP''P = \angle P_1AQ.$$

Ha P'' egybeesik Q'' -vel, vagyis $PQ \perp OM$, akkor egyenlőtlenségeink helyén egyenlőség áll, A azonos P'' -vel, a megoldás egyenesszakasszá fajul.

Még egy megoldást kapunk, ha egyenlő szárú háromszögünk alapját az ON száron keressük. Az imént mondott elfajulás csak az egyik esetben következhet be.

Benczúr András (Budapest, Fazekas M. g.)
dolgozatából, a diszkussziót kiegészítve

Sok számolásos megoldás érkezett. Egy ilyen vázolunk, a diszkussziót az olvasóra bízuk.



2. ábra

II. megoldás. Húzzunk párhuzamost OM -mel A -n és P -n át, legyen P és Q vetülete az előbbin S , ill. T , Q vetülete az utóbbin U . Az APS , AQT és az $AP''S$, $AQ''T$ háromszögpárok nyilvánvaló hasonlóságából:

$$\frac{PS}{QT} = \frac{AS}{AT} = \frac{P''S}{Q''T},$$

ezért $PS = x$, $P''P = p$, $Q''Q = q$, $QU = r$ jelöléssel (r negatív is lehet):

$$\frac{x}{x-r} = \frac{x-p}{q+r-x}, \quad 2x^2 - (p+q+2r)x + pr = 0,$$

$$x = \frac{1}{4}(p+q+2r \pm \sqrt{(p+q+2r)^2 - 8pr}).$$

Sebestyén Zoltán (Celldömölk, Berzsenyi D. g.)