

I. megoldás. Feltesszük, hogy az egyenletnek vannak (valós) gyökei, azaz hogy $b^2 - 4ac \geq 0$. Azt is feltehetjük, hogy $a > 0$, mert ellenkező esetben a bal oldalt a negatívjával helyettesíthetjük. Ekkor a gyökképlet nevezőjében pozitív szám áll, számlálójának abszolút értéke vagy a tagok abszolút értékének összegével egyenlő, vagy kisebb annál (ti. ha egyik tag negatív, a másik pozitív). Eszerint

$$(2) \quad |x| \leq \frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(A négyzetgyökön a nem negatív gyököt értjük, az tehát egyenlő az abszolút értékével.) Elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy

$$\frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|} = \frac{2a|c| + b^2}{a|b|},$$

másképpen, hogy a jobb és a bal oldal különbsége:

$$(3) \quad \frac{2a|c| + b^2}{a|b|} - \frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4a|c| + b^2 - |b| \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a|b|}$$

nem negatív. Bővítsük evégett a törtet a

$$4a \cdot |c| + b^2 + |b| \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}$$

kifejezéssel. Ez pozitív, mert második tagja pozitív, a másik kettő pedig nem negatív, ezért a nevező pozitív lesz, a számláló pedig

$$(4) \quad (4a \cdot |c| + b^2)^2 - b^2(b^2 - 4ac) = 16a^2c^2 + 4ab^2(2|c| + c).$$

Az utóbbi alak szerint egyik tag sem lehet negatív, mert a zárójelben $3|c|$, ill. $|c|$ áll aszerint, hogy c pozitív vagy negatív. Így a bővített tört számlálója nem lehet negatív, tehát a (3) tört sem. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

(2)-ben a nagyobb abszolút értékű gyökre egyenlőség áll fenn, mert a négyzetgyökök előjele az egyik gyök esetében megegyezik $-b$ előjével. Ezért (1)-ben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha (3), és vele (4) értéke 0. Ez nyilván csak $c = 0$ mellett következik be. $c \neq 0$ esetében pedig (1)-ben a $<$ jel érvényes.

Fodor János (Miskolc, Földes F. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Alakítsuk át (1) jobb oldalát az ismert $b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1x_2$ összefüggések alapján, továbbá válasszuk a gyökök indexeit úgy, hogy teljesüljön

$$(5) \quad |x_2| \geq |x_1|. \text{ Így az}$$

$$(6) \quad |x_2| \leq \frac{2|a^2x_1x_2| + a^2(x_1 + x_2)^2}{|-a^2(x_1 + x_2)|} = \frac{2|x_1x_2| + (x_1 + x_2)^2}{|x_1 + x_2|} = \frac{2|x_1x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1 + x_2|$$

egyenlőtlenséget kell igazolnunk. (A nevező $b \neq 0$ miatt nem 0.)

Ha x_1 és x_2 egyező előjelű, vagy $x_1 = 0$, (mind a kettő nem lehet 0, mert $b \neq 0$), akkor összegük abszolút értéke egyenlő az abszolút értékek összegével. Ebben az esetben tehát (6) jobb oldala így írható

$$\frac{2|x_1x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1 + x_2| = \frac{2|x_1x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1| + |x_2| \geq x_2.$$

Ha x_1 és x_2 egyike pozitív, a másik negatív, akkor összegük abszolút értéke (5) alapján $|x_2| - |x_1|$ -gyel egyenlő (és $b \neq 0$ miatt ez a különbség sem 0). Így (6) jobb oldala – felhasználva most azt is, hogy szorzat abszolút értéke a tényezők abszolút értékének szorzatával egyenlő –

$$\begin{aligned} \frac{2|x_1x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1 + x_2| &= \frac{2|x_1| \cdot |x_2|}{|x_2| - |x_1|} + |x_2| - |x_1| = \\ &= |x_2| + \frac{2|x_1| \cdot |x_2| - |x_1| \cdot |x_2| + |x_1|^2}{|x_2| - |x_1|} = |x_2| + \frac{|x_1|(|x_2| + |x_1|)}{|x_2| - |x_1|} > |x_2|. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a (6) egyenlőtlenséget, s így (1)-et is.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A második esetben az utolsó előtti kifejezés így alakítható tovább:

$$|x_2| + |x_1| + \frac{2|x_1|^2}{|x_2| - |x_1|} > |x_2| + |x_1|,$$

és világos, hogy az első esetben sem kisebb (6) jobb oldala, mint $|x_1| + |x_2|$. Így fennáll az

$$|x_1| + |x_2| \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|}.$$

egyenlőtlenség is, és egyenlőség továbbra is csak akkor következik be, ha az egyik gyök, s így c is 0.