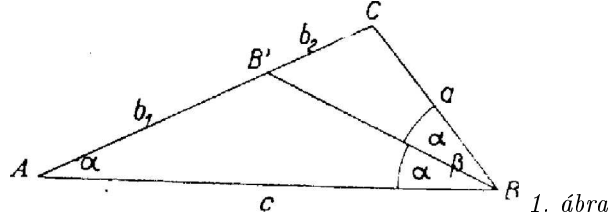


I. megoldás. Legyenek az ABC háromszög szögei rendre α , β , γ és $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 4$. Az állítás szerint a $BC/AB = a/c = \varrho$ arány közelítőleg $4/9$.



Húzzuk meg a β -szög BB' felezőjét és legyen $AB' = b_1$, $B'C = b_2$. Az ABB' háromszög egyenlő szárú, mert $\beta = 2\alpha$, és így $\beta/2 = \alpha$. Innen egyrészt

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{AB/2}{AB'} = \frac{c}{2b_1},$$

másrészt a szögfelező osztási arányára vonatkozó tétel szerint

$$(2) \quad b_1/b_2 = c/a = 1/\varrho.$$

A $BB'C$ háromszög hasonló ABC -höz, mert C -nél levő szögük közös és $CBB' \sphericalangle = \alpha = BAC \sphericalangle$. Innen

$$b_2 : a = a : (b_1 + b_2),$$

(2) alapján b_2 -t ϱb_1 -gyel helyettesítve

$$\begin{aligned} \varrho b_1(b_1 + \varrho b_1) &= a^2 = \varrho^2 c^2, & \frac{c}{b_1} &= \sqrt{1 + \frac{1}{\varrho}}, \text{ és így} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\varrho}}, & \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4\varrho}} \approx \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4330. \end{aligned}$$

Mivel a szögek adott arányából $\alpha = 180^\circ/7$, vagyis α a szabályos hétszög egy oldalához tartozó középponti szög fele, azért az r sugarú körbe írt szabályos hétszög egy oldala

$$a_7 = 2r \sin \frac{180^\circ}{7} = 2r \sin \alpha,$$

így közelítőleg

$$a_7 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} r,$$

vagyis az r sugarú körbe írt szabályos hétszög oldala közelítőleg akkora, mint az r oldalú szabályos háromszög magassága. Ez ismert közelítő eljárás a szabályos hétszög szerkesztésére.

$\sin \alpha$ értéke a táblázatból $0,4339$, tehát a közelítő érték hiánnyal közelít és relatív hibája $0,3\%$ alatt van.

Raisz Miklós (Miskolc, Földes F. g. III. o. t.)

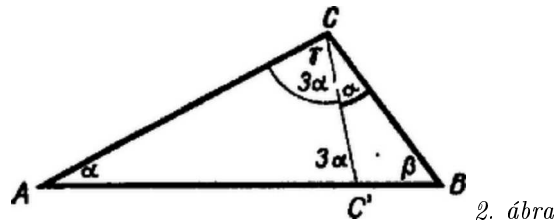
Megjegyzés. Akkor is egy az eredetihez hasonló rész-háromszöget kapunk ABC -ből, ha a $\gamma = 4\alpha$ szögnek a CB oldalhoz közelebbi CC' negyedelőjét húzzuk meg: $CBC' \triangle \sim ABC \triangle$, mert B -nél közös szögük van és $BCC' \sphericalangle = \gamma/4 = \alpha = BAC \sphericalangle$. Továbbá a másik rész-háromszög itt is egyenlő szárú, mert $CC'A \sphericalangle = C'CB \sphericalangle + CBC' \sphericalangle = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = 3\gamma/4 = C'CA \sphericalangle$. Így

$$BC' : BC = BC : BA, \quad BC' = \frac{a^2}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 c \approx \varrho^2 c,$$

$$b = AC = AC' = AB - C'B = (1 - \varrho^2)c,$$

tehát az ABC háromszög oldalainak aránya

$$(3) \quad a : b : c := \varrho c : (1 - \varrho^2)c : c = \varrho : (1 - \varrho^2) : 1 \approx 4 : \frac{65}{9} : 9.$$



2. ábra

Ha már most olyan $A^*B^*C^*$ háromszöget szerkesztünk, amelyben a három oldal aránya pontosan megfelel (3)-nak, akkor az A^* , B^* csúcsnál levő szög közelítőleg $180^\circ/7$, ill. $360^\circ/7$, ezért a B^* körül B^*A^* sugárral írt körből a B^*C^* , valamint az A^*C^* -gal párhuzamos B^*E^* sugarak D , E végpontjait A^* -hoz hozzávéve az ezen körbe írt szabályos hétszögre 3 csúcs helyzetét ismerjük jó közelítéssel.

Valóban

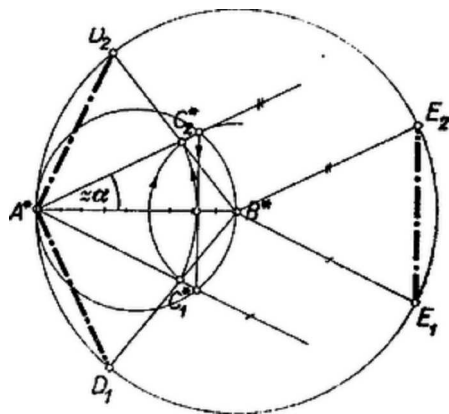
$$\cos B^*A^*C^* \triangleleft = \frac{81^2 + 65^2 - 36^2}{2 \cdot 81 \cdot 65} = \frac{73}{81},$$

ebből

$$\sin B^*A^*C^* \triangleleft = \frac{4\sqrt{77}}{81} \approx 0,4333,$$

vagyis a közelítés hibája biztosan alatta van 0,2%-nak.

Ha a közelítően szabályos hétszöget egy adott sugarú körben keressük, akkor egyszerűen így járhatunk el: a középpontot B^* -nak véve egy sugarat 9 egyenlő részre osztunk, föléje mint átfogó fölé olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, melyben a B^* -ból kiinduló befogó 4 rész hosszúságú. Ekkor a másik befogó vetülete az átfogón $9 - 16/9$, és így a $9, 65/9, 4$ oldalakkal szerkesztett háromszög megfelelő (3. ábra).



3. ábra

Quittner Pál (feldolgozó munkatárs)

II. megoldás a feladat első részére. A fenti jelölésekkel a szinusz-tétel alapján

$$\varrho = a/c = \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha / \sin 3\alpha,$$

tehát az addíciós tételből kapható $\sin 3\alpha = \sin \alpha(3 - 4\sin^2 \alpha)$ kifejezés behelyettesítésével, majd $\sin \alpha$ -val (ami nem 0) egyszerűsítve:

$$\varrho \sin 3\alpha = \sin \alpha(3\varrho - 4\varrho \sin^2 \alpha) = \sin \alpha,$$

$$4\varrho \sin^2 \alpha = 3\varrho - 1, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4\varrho}} \approx \frac{\sqrt{3}}{4},$$

mint az I. megoldásban.

Renner Gábor (Budapest, I. István g. IV. o. t)