

Helyettesítsünk az $x + y + z = 0$ összefüggés alapján z helyébe $-(x + y)$ -t és fejezzük ki a fellépő hatványösszegeket x -szel és y -nal:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2),$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 - (x + y)^3 = -3x^2y - 3xy^2 = -3xy(x + y),$$

$$(3) \quad x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 = \\ = 2(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4),$$

$$(4) \quad x^5 + y^5 + z^5 = x^5 + y^5 - (x + y)^5 = (x + y) [x^4 - x^3y + x^2y^2 - \\ - xy^3 + y^4 - (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)] = \\ = (x + y)(-5x^3y - 5x^2y^2 - 5xy^3) = -5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2),$$

$$(5) \quad x^7 + y^7 + z^7 = x^7 + y^7 - (x + y)^7 = (x + y) [x^6 - x^5y + x^4y^2 - \\ - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6 - (x^6 + 3x^5y + 3x^4y^2 + y^3)^2] = \\ = (x + y) [x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6 - (x^6 + \\ + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6)] = \\ = (x + y)(-7x^5y - 14x^4y^2 - 21x^3y^3 - 14x^2y^4 - 7xy^5) = \\ = -7xy(x + y)(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4).$$

Az (1) jobb oldalán álló háromtagú kifejezést négyzetre emelve

$$(6) \quad (x^2 + xy + y^2)^2 = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4.$$

Így (1) és (3)-ból

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + xy + y^2)^2 = 2 [2(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4)] = \\ = 2(x^4 + y^4 + z^4).$$

Ezzel az α) egyenlőséget igazoltuk.

Ha a β)-ban nevezőben szereplő hatványösszegek egyike sem 0, akkor a rájuk nyert (1)–(5) kétváltozós kifejezéseket behelyettesítve a lehetséges egyszerűsítések után az első kéttagú kifejezésben

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = 2$$

adódik. A második kifejezésben is egyszerűsíthetünk minden az ismeretleneket tartalmazó kifejezéssel, ha az első törtnél figyelemmel vagyunk (6)-ra is, és

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = 2$$

adódik. Ezzel β)-t is igazoltuk.

A fellépő nevezők értéke 0, ha x , y , vagy $x + y = -z$ értéke 0. Ha egyik változó sem 0, akkor

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

sem 0, s így a négyzete sem. A β)-ban fellépő törteknek tehát mindig van értelme, ha x , y , z egyike sem 0, és csak akkor.

Klukovits Lajos (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t)

Megjegyzések. 1. Hasonló szorzatalakokat nyerhetünk a fellépő hatványösszegekre a változók szimmetriájának megbontása nélkül is, csak az $x + y + z = 0$ összefüggést használva fel ismételten. Pl.

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) - (x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2) = \\ = -(xy + yz + zx)(x + y + z) + 3xyz = 3xyz.$$

Ezen az úton is eljuthatunk a feladat megoldásához.

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

2. α -t igazolhatjuk a változók szimmetriájának megbontása nélkül a két oldal különbségének szorzattá alakításával is:

$$\begin{aligned}2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = \\&= x^4 - 2x^2(y^2 + z^2) + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 = [x^2 - (y^2 + z^2)]^2 - 4y^2z^2 = \\&= (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz) = [x^2 - (y - z)^2] [x^2 - (y + z)^2] = \\&= (x - y + z)(x + y - z)(x - y - z)(x + y + z) = 0,\end{aligned}$$

mert az utolsó tényező 0.