

Jelöljük a sorozat k -adik elemét a_k -val. Az elemek képzésére adott szabály az elemek reciprokaiból alkotott sorozatra – feltéve, hogy nem lép fel a sorozatban a 0 –, azt mondja, hogy ebben a sorozatban bármely két elem az előtte és utána állónak számtani közepe:

$$(1) \quad \frac{1}{a_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}} \right), \quad \text{vagy} \quad a_k^{-1} = \frac{a_{k-1}^{-1} + a_{k+1}^{-1}}{2}.$$

Eszerint a reciprokokból alkotott

$$(2) \quad a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_k^{-1}, \dots$$

sorozat számtani sorozat. Különbsége (ha a_1, a_2 nem 0)

$$(3) \quad d = a_2^{-1} - a_1^{-1} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2},$$

ennek felhasználásával az n -edik elem

$$a_n^{-1} = a_1^{-1} + (n-1)d = \frac{1}{a_1} + \frac{(n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2} = \frac{(n-1)a_1 - (n-2)a_2}{a_1 a_2}.$$

Tehát a szóban forgó sorozat n -edik eleme

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{(n-1)a_1 - (n-2)a_2}.$$

Az n -edik elemnek a megelőző kettővel való kifejezését úgy kapjuk, ha (1)-ben k helyébe $n-1$ -et írunk és megoldjuk a_n -re:

$$a_n = \frac{a_{n-2} a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}.$$

A számtani sorozat ismert tulajdonsága, hogy bármely elem nemcsak a szomszédainak számtani közepével egyenlő, hanem a sorozat bármely hozzá képest szimmetrikus helyzetű elempárjának is. Valóban ha $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ egy számtani sorozat, és d a különbsége, továbbá $i < k$, akkor

$$\frac{b_{k-i} + b_{k+i}}{2} = \frac{b_1 + (k-i-1)d + b_1 + (k+i-1)d}{2} = b_1 + (k-1)d = b_k.$$

Ezt a (2) számtani sorozatra alkalmazva

$$\frac{a_{k-i}^{-1} + a_{k+i}^{-1}}{2} = a_k^{-1}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{a_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{k-i}} + \frac{1}{a_{k+i}} \right),$$

az állításnak megfelelően.

Szekeres Veronika (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Könnyen megadhatjuk annak feltételét, hogy sorozatunk minden határon túl folytatható legyen. Ennek csak az lehet akadálya, ha a (2) sorozatban fellép a 0 szám. Mármint a $b_1, b_1 + d, b_1 + 2d, \dots$ számtani sorozatban akkor lép fel tagként a 0 szám:

$$b_k = b_1 + (k-1)d = 0, \quad \text{ha} \quad k-1 = -\frac{b_1}{d},$$

vagyis a $-b_1/d$ hányados pozitív egész szám, vagy 0. Így (3) alapján, ha a

$$-\frac{a_1^{-1}}{a_1 - a_2} = \frac{a_2}{a_2 - a_1} \cdot \frac{1}{a_1 a_2}$$

hányados nem pozitív egész szám, vagy 0, akkor sorozatunk tagjai minden határon túl képezhetők.