

a) Legyen a gömb sugara r és a gömbsüveg magassága m . Ekkor a kúp magassága $r - m$, alapjának sugarára $\varrho^2 = r^2 - (r - m)^2 = m(2r - m)$. A kívánt úszási helyzetben a kúp kiszorította víz tömege és a gömbcikk tömege egyenlők:

$$(1) \quad \frac{m(2r - m)(r - m)\pi}{3} = \frac{2r\pi m \cdot r \cdot d}{3}$$

$$(2r - m)(r - m) = 2r^2 d.$$

Innen mindjárt a keresett $r - m = x$ mélységre kaphatunk egyenletet:

$$(r + x)x = 2r^2 d, \quad x^2 + rx - 2r^2 d = 0.$$

A két gyök szorzata: $-2r^2 d$, negatív, mert $d > 0$, ezért a két gyök ellentett előjelű (és természetesen biztosan valós). Csak a pozitív gyököt használhatjuk, tehát

$$x = r(\sqrt{1 + 8d} - 1)/2.$$

Úszás nyilván csak $d < 1$ mellett lehetséges, így a zárójeles kifejezés értéke kisebb 2-nél, tehát $x < r$, aminek nyilván teljesülnie kellett.

A kúp α fél-nyílásszögére $\cos \alpha = x/r$, tehát (radiánban, ill. fokban):

$$\alpha_{\text{rad}} = \arccos \frac{\sqrt{1 + 8d} - 1}{2}, \quad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{1 + 8d} - 1}{2}.$$

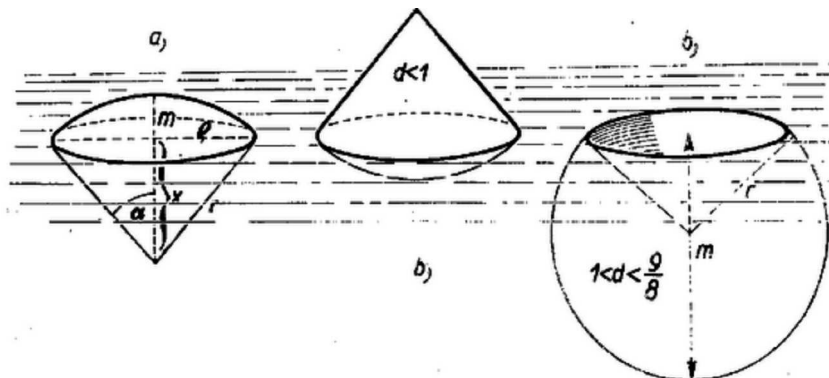
b) A második úszási feltétel mellett a gömbszelet kiszorította víz tömege egyenlő a gömbcikk tömegével:

$$(2) \quad \frac{m^2 \pi}{3} (3r - m) = \frac{2r\pi m \cdot r \cdot d}{3},$$

$$m^2 - 3rm + 2r^2 d = 0, \quad m = \frac{r}{2} (3 \pm \sqrt{9 - 8d}).$$

Eszerint $d < 9/8$ mellett mindkét gyök valós, és pedig pozitív.

Ha $d < 1$, akkor a diszkrimináns nagyobb 1-nél, ezért a nagyobb gyök nagyobb a gömb $2r$ átmérőjénél, feladatunkban nem értelmezhető; a kisebb gyök viszont kisebb r -nél, tehát az eredményül adódó gömbcikk kisebb félgömbnél.



$d = 1$ esetén $m_1 = r$, $m_2 = 2r$, mindkét megoldás elfajult. Az elsőben félgömbről van szó, a kúppalást körlappá terül ki; a kívánt úszás azonban lehetséges. A második megoldásban a gömböt nem vágtuk ketté, nincs kúppalást.

$1 < d < 9/8$ esetén a diszkrimináns kisebb 1-nél, mindkét m -gyök r és $2r$ közé esik, konkáv gömbcikket ad, és így a test a víznél nagyobb sűrűsége ellenére úszik. Pl. $d = 35/32$ esetén $m_1 = 5r/4$, $m_2 = 7r/4$. Végül $d = 9/8$ esetén a gyakorlat szempontjából egyetlen megoldás: $m = 3r/2$.

A gömbcikk csúcsa $d < 1$ esetén a víz felett van, $d > 1$ esetén pedig alatta, távolsága a felszíntől mindig $|r - m|$. A tömör gömbcikk rész félnyílásszöge itt is a $\cos \alpha = (r - m)/r$ képlettel számítható. $1 < d \leq 9/8$ esetén α tompaszög, $d = 9/8$ esetén éppen 120° .

Nagy Dénes Lajos (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A dolgozatok zöme a b) részben is x -re írt fel egyenletet és itt is csak a pozitív gyököt fogadta el, nem gondolt konkáv gömbcikkre, amelynél a határoló kúppalást a várakozással ellentétben a vízszintes alatt van, – de mégsem érintkezik a vízzel. Ez a szemléletmód sokaknál a körcikk és a körszelet szűk szemléletében gyökerezik. Jegyezzük meg, a két sugárral, ill. egy húrral kettévágott körlemez *mindkét* része körcikk, ill. körszelet, nemcsak a kisebb. Észrevehető a különbség a b) kérdés óvatosabb fogalmazásában is az a)-éval szemben: „milyen mélyen van ...”,

ill. „a felszínhez viszonyított helyzet.” A $d > 1$ esetet az úszás lehetetlensége alapján elvető versenyzők nem gondoltak pl. a vas hajók úszására.

Volt viszont, aki az *a)* részben gondolt konkáv gömbcikkre, rajzán az egész test a külső vízszint fölött van, a kúpalakú üreg tele van vízzel, és így „valósul meg” a palást érintkezése a vízzel. Ez fizikailag lehetetlen.

Néhányan kimondták, hogy a *b)* eset mindkét m -gyöke pozitív, de az elvont tárgyalás után az eredmény értékelése végett nem tértek vissza a gyakorlathoz. Ez gyakorlati feladatban hiány.

2. Számos dolgozat pongyolán használja az „arc cos” jelölést. Ebben „arc” = arkusz, magyarul *ívet* jelent („arkus-papír”), vagyis ívmértékben, radiánban vett szöget. Az „arc cos x ” jelölés pedig a „koszinusz arkusza”, pontosabban: az x számhoz mint koszinusz-értékhez tartozó ív. (Ezt a pongyolaságot természetesen nem vettük hibának.)

3. A (2) egyenlet csak az m -mentes tagban tér el (1) kifejtett alakjától: $m^2 - 3rm + 2(1-d)r^2 = 0$ -tól. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy (1)-ben d helyére $(1-d)$ -t írva kapjuk (2)-t, fizikai szempontból pedig a következőképpen értelmezhetjük. V térfogatú d sűrűségű testet vízbe téve $V_1 = Vd$ térfogatú része merül vízbe és $V_2 = V(1-d)$ térfogatú része marad a levegőben. Az *a)* és *b)* úszási helyzetek (konvex gömbcikkre) éppen megcserélik a bemerült, ill. levegőn levő rész-testeket: $V'_1 = V_2$ és $V'_2 = V_1$; ebből adódik a d , $1-d$ csere.

Bodoky Andrea (Budapest, Teleki B. lg. IV. o. t.)

Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. gyak. g. IV. o. t.)

4. Az előző megjegyzés megmagyarázza azt a véletlen észrevételt, hogy $d = 0,5$ mellett az *a)* és *b)* feltételnek eleget tevő gömbcikk magassága egyenlő. Ekkor $\alpha = 51,8^\circ$, tehát a $103,6^\circ$ teljes nyílású gömbcikk mindkét helyzetben úszhat.

Demendy Zoltán (Budapest, Hengersor úti g. IV. o. t.)

5. A feladat szövegének megfelelően a fentiekben az úszás biztonságát, stabilitását nem vettük tekintetbe.