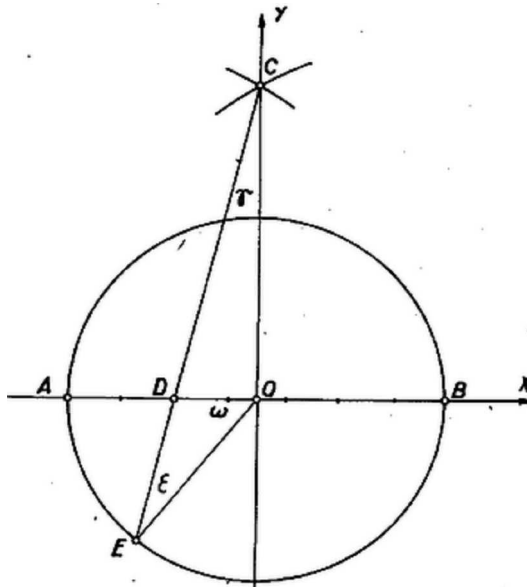


I. megoldás. Ha $n = 4$, akkor D azonos a kör O középpontjával, ezért E felezi a C -től távolabb fekvő AB ívet, eszerint a közelítő szerkesztés pontos. Ha $n \geq 5$, akkor D és E az OC egyenesnek azon a partján van, mint A , ha $n = 3$, akkor az ellenkező partján. Legyen $\angle AOE = \omega$, $\angle OCE = \gamma$, $\angle OEC = \varepsilon$, és válasszuk hosszegységnek az adott kör sugarát. Így $AE = 2 \sin \omega/2$. Az OCE háromszögből $\omega = 90^\circ - (\gamma + \varepsilon)$, tehát

$$(1) \quad AE = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{2}} = \sqrt{2 - 2 \sin(\gamma + \varepsilon)} = \sqrt{2 - 2 \sin \gamma \cos \varepsilon - 2 \cos \gamma \sin \varepsilon}.$$

A képlet abban az esetben marad helyes $n = 3$ -ra is, ha ez esetben γ -t és ε -t negatívnak vesszük.



Az OCD derékszögű háromszögben $OC = \sqrt{3}$, $OD = OA - AD = 1 - 4/n = (n - 4)/n$, ezért (mindig a pozitív gyököt véve)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{n-4}{n\sqrt{3}}, \quad \text{ebből} \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{4n^2 - 8n + 16}}, \\ \sin \gamma &= \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{n-4}{2\sqrt{n^2 - 2n + 4}}. \end{aligned}$$

Másrészt az OCE háromszögből a szinusz-tétellel

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= \frac{OC}{OE} \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{n-4}{\sqrt{n^2 - 2n + 4}}, \quad \text{és így} \\ \cos \varepsilon &= \frac{\sqrt{4n^2 - 8n + 16 - 3(n^2 - 8n + 16)}}{2\sqrt{n^2 - 2n + 4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2 + 16n - 32}{n^2 - 2n + 4}}. \end{aligned}$$

Az $n = 3$ esetben képleteink OD -t, $\sin \gamma$ -t és $\sin \varepsilon$ -t negatívnak, a koszinusz-értékeket pozitívnak adják, ami éppen megfelel fönti megjegyzésünknek. Ezeket (1)-be beírva, kis átalakítások után

$$\begin{aligned} (1) \quad AE &= \sqrt{2 - \frac{(n-4)(3n + \sqrt{(n+8)^2 - 96})}{2[(n-1)^2 + 3]}} = \\ &= \sqrt{\frac{(n^2 + 4n + 16 - (n-4)\sqrt{(n+8)^2 - 96})}{2[(n-1)^2 + 3]}}. \end{aligned}$$

(A belső négyzetgyökkel alatt pozitív szám áll, ha $n \geq 2$, és a második alakban a kisebbítendő pozitív és négyzete mindig nagyobb, mint a kivonandó négyzeténél.)

Jelöljük az adott körbe írt szabályos n -szög oldalát a_n -nel, az erre (2)-ből nyert közelítő értéket pedig a'_n -vel. Ekkor $a_n = 2 \sin 180^\circ/n$, $a'_n = AE$, és az előírt n -ekkel a táblázatba foglalt értékek, $a'_n - a_n$ hibák és $(a'_n - a_n)/a_n$ relatív

hibák adódnak.

n	a'_n	a_n	$a'_n - a_n$	$\frac{(a'_n - a_n)100}{a_n}$
3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	0
5	1,1749	1,1756	$-7 \cdot 10^{-4}$	-0,06%
6	1	1	0	0
7	0,8692	0,8678	$+14 \cdot 10^{-4}$	+0,18%
8	0,7684	0,7654	$+30 \cdot 10^{-4}$	+0,4%
9	0,6886	0,6840	$+46 \cdot 10^{-4}$	+0,7%
10	0,6239	0,6840	$+59 \cdot 10^{-4}$	+1,0%
36	0,1842	0,1744	$+98 \cdot 10^{-4}$	+5,7%

Ezek szerint az eljárás az egyébként is könnyen szerkeszthető szabályos 3-, 4- és 6-szög oldalát pontosan adja meg, a többi $n \leq 10$ értékekre pedig 1%-nál kisebb hibával. $n = 5$ -re a közelítő szakasz kisebb, a többiekre nagyobb a valódi oldalszakasznál. (10-nél nagyobb n -ekre a hiba valószínűleg egyre gyorsabban nő, $n = 360$ -ra már közel 10% a többlet.)

Abos Imre (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

II. megoldás. Legyen az adott kör a koordinátarendszerbe az origó köré egységnyi sugárral beírt kör és legyen $A(-1; 0)$, ekkor $B(1; 0)$, továbbá $C(0, \sqrt{3})$. Így D abszcisszája $-1 + 4/n = (4 - n)/n$, ordinátája 0, a CD egyenes egyenlete

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}n}{n-4}x, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{(n-4)(y - \sqrt{3})}{\sqrt{3}n}.$$

Ezt az egységkör $x^2 + y^2 - 1 = 0$ egyenletébe helyettesítve E ordinátájára

$$[(n-4)^2 - 1 - 3n^2]y^2 - 2\sqrt{3}(n-4)^2y + 3[(n-4)^2 - n^2] = 0,$$

amiből a negatív gyökre van szükségünk, mert így kapjuk a C -től távolabbi metszéspontot. A diszkrimináns $1/4$ része, majd a kívánt gyök:

$$\begin{aligned} 3(n-4)^4 - 3[(n-4)^2 + 3n^2][(n-4)^2 - n^2] &= 9n^4 - 6n^2(n-4)^2 = \\ &= 3n^2(n^2 + 16n - 32), \\ y_E &= \frac{\sqrt{3}(n-4)^2 - n\sqrt{3}\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{4n^2 - 8n + 16}. \end{aligned}$$

Így E abszcisszája, mindjárt összevonással:

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{n-4}{n} \left(\frac{y}{\sqrt{3}} - 1 \right) = \frac{n-4}{n} \cdot \frac{-3n^2 - n\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{4(n^2 - 2n + 4)} = \\ &= -\frac{(n-4)(3n + \sqrt{n^2 + 16n - 32})}{4(n^2 - 2n + 4)}, \end{aligned}$$

végül az AE szakasz hosszának négyzete

$$\begin{aligned} (x_E + 1)^2 + y_E^2 &= (x_E^2 + y_E^2 + 1) + 2x_E = 2 + 2x_E = \\ &= 2 - \frac{(n-4)(3n + \sqrt{n^2 + 16n - 32})}{4(n^2 - 2n + 4)}, \end{aligned}$$

megegyezésben a (2) eredménnyel.

Surányi Sándor (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)