

Jelöljük a kétjegyű szám (egyenlő) jegyeit x -szel, a négyzetét y -nal és a számrendszer alapszámát b -vel. Ekkor b legalább 2, x és y kisebb b -nél és egyik sem 0. A feladat feltétele így írható:

$$\overline{xx^2} = \overline{yyy},$$

azaz

$$(xb + x)^2 = yb^3 + yb^2 + yb + y.$$

Kiemeléssel, majd $b + 1$ -gyel (ami nem 0) egyszerűsítve

$$\begin{aligned} x^2(b + 1)^2 &= yb^2(b + 1) + y(b + 1) = y(b + 1)(b^2 + 1), \\ x^2(b + 1) &= y(b^2 + 1). \end{aligned}$$

A bal oldal osztható $b + 1$ -gyel, ezért a jobb oldal is. A jobb oldalon egy $b + 1$ -gyel nyilvánvalóan osztható részét különválasztunk:

$$(1) \quad x^2(b + 1) = y(b^2 - 1 + 2) = y(b + 1)(b - 1) + 2y.$$

Eszerint a jobb oldal csak úgy lehet $b + 1$ -gyel osztható, ha $2y$ osztható vele. Másrészt $0 < 2y < 2b$, tehát kell, hogy $2y = b + 1$ legyen és (1)-ből

$$(2) \quad x^2 = y(b - 1) + 1,$$

vagy 2-vel szorozva, hogy y -t kiküszöböljük:

$$2x^2 = (b + 1)(b - 1) + 2 = b^2 + 1.$$

Ezek szerint b csak a

$$(3) \quad b^2 = 2x^2 - 1$$

egyenletet kielégítő szám lehet.

Könnyű látni, hogy $x = 1$, $b = 1$ kielégíti az egyenletet, de kérdésünknek nem megoldása, mert 1 nem lehet számrendszer alapszáma, és nem áll $x < b$. További megoldást keresve b csak páratlan lehet, mert b^2 páratlan. Így pedig x sem lehet páros, mert $2x^2 = b^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k(k + 1) + 2$, tehát $x^2 = 2k(k + 1) + 1$, páratlan. Mindjárt az $x = 5$ próba megoldást ad: $b = 7$, és ebből $y = 4$. Eszerint

$$(55_7)^2 = 4444_7.$$

(A tízes rendszerben az alap $5 \cdot 7 + 5 = 40$, a négyzete $4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 4 = 4(7^2 + 1)(7 + 1) = 1600$, tehát az eredmény helyes.)

Tetszés szerinti számú megoldást kapunk az $x_0 = 1$, $b_0 = 1$ megoldásból kiindulva az $x_{k+1} = 3x_k + 2b_k$, $b_{k+1} = 4x_k + 3b_k$ képletpár alapján.¹ Ha ugyanis x_k , b_k megoldás, azaz

$$b_k^2 - 2x_k^2 + 1 = 0,$$

akkor x_{k+1} , b_{k+1} is megoldás, mert

$$\begin{aligned} b_{k+1}^2 - 2x_{k+1}^2 + 1 &= 16x_k^2 + 24x_k b_k + 9b_k^2 - 18x_k^2 - 24x_k b_k - 8b_k^2 + 1 = \\ &= b_k^2 - 2x_k^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

A képletpárral $x_1 = 3 + 2 = 5$ és $b_1 = 4 + 3 = 7$; ezt találtuk meg próbálgatással. A következő megoldás $x_2 = 29$, $b_2 = 41$ és $y_2 = 21$.

Gálfi László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzés. (2)-ből b kiküszöbölésével

$$x^2 = 2y^2 - 2y + 1 = y^2 + (y - 1)^2,$$

eszerint az x , y számjegyekre minden olyan pythagorászi számhármast átfogószáma, ill. nagyobb befogószáma megoldást ad, melyben a befogószámok különbsége 1. Ezek csak alap hármast lehetnek, mert nem alaphármastban a befogószámok különbsége nyilván többszöröse a legnagyobb közös osztónak. Ezzel az észrevétellel azonban nem jutottunk közelebb a megoldáshoz, mert ha az ismert képletrendszer³ befogó képleteivel

$$(u^2 - v^2) - 2uv = \pm 1, \quad \text{akkor} \quad (u - v)^2 = 2v^2 \pm 1,$$

azaz ismét a (3) típusú egyenletre jutottunk, ill. arra, amely belőle -1 helyére $+1$ -et írva adódik.

¹Lásd pl. ERDŐS PÁL–SURÁNYI JÁNOS: *Válogatott fejezetek a számelméletből* (Budapest, 1960, Tankönyvkiadó) 200. o. 6. fd.

²Igaz az is, de bizonyítása nem könnyű, hogy a fenti összefüggések alapján kiszámított x_k , b_k számpárok megadják (2) összes megoldását.

³Lásd legutóbb K. M. L. 23 (1961/12) 212–213. o.