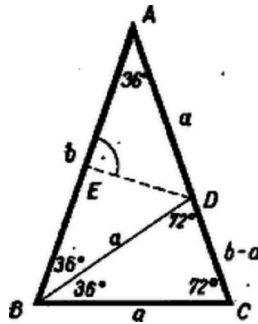


I. megoldás. A 36° -os szög a 180° -nak 5-ödrésze. Ezért az olyan ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB = AC$), melynek szárai között $BAC \sphericalangle = 36^\circ$ -os szög van, az alapon levő szögek nagysága 72° , a 36° -nak 2-szerese. Így az ABC szög BD felezőjét meghúzva egyrészt $ABD \sphericalangle = BAD \sphericalangle = 36^\circ$, másrészt $BDC \sphericalangle = ABD \sphericalangle + BAD \sphericalangle = 72^\circ = BCD \sphericalangle$, tehát a keletkezett ABD és BDC háromszögek egyenlő szárúak: $BC = BD = AD$, és BDC háromszög hasonló ABC -hez.



Ebből kiszámíthatjuk a $BC = a$ és $AB = b$ oldalak arányát, abból pedig az ABD háromszög felhasználásával $\cos 36^\circ$ -ot:

$$\begin{aligned} (1) \quad & CA : BC = DB : CD, \\ (2) \quad & b : a = a : (b - a), \\ & b^2 - ab - a^2 = 0, \\ & \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0, \end{aligned}$$

és ennek pozitív gyökével:

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{2AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \end{aligned}$$

az állításnak megfelelően.

$3^\circ = 75^\circ - 72^\circ$, ezért előkészítésül kiszámítjuk 75° és 72° szinuszt és koszinuszt a $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$, $72^\circ = 2 \cdot 36^\circ$ felbontások és az első rész eredménye alapján.

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,9659, \\ \cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,2588; \\ \cos 72^\circ &= \cos^2 36^\circ - \sin^2 36^\circ = 2 \cos^2 36^\circ - 1 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \approx 0,3090, \\ \sin 72^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 72^\circ} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \approx 0,9711. \end{aligned}$$

Ezekkel

$$\begin{aligned} \sin 3^\circ &= \frac{1}{16} \left[(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right] \approx 0,05234, \\ \cos 3^\circ &= \frac{1}{16} \left[(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right] \approx 0,9986. \end{aligned}$$

$\sin 3^\circ$ -ot 4 értékes jegyre számítottuk ki.

Kiss István (Miskolc, Kilián Gy. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (2) egyenlethez az 1054.feladatban¹ bebizonyított tételnek a szabályos ötszög 4 csúcsával meghatározott trapézra való alkalmazásával is eljuthatunk.

¹1 K. M. L. 23 (1961/9) 17. o.

2. A (2) egyenletből $a = b(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618b$ az ún. „aranymetszés” (folytatólagos arányos osztás) feladatának megoldását adja. Ez a régi feladat egy szakasz olyan felosztását kívánja két részre, hogy a nagyobb rész ugyanolyan arányban álljon az egészszel, mint a maradék a nagyobb résszel.

Ezt fejezi ki az (1) aránypár. Az is benne van e követelményben, hogy a a nagyobb rész, ugyanis az első arányban $b > a$, ezért a másodikban is $a > b - a$.

3. Mivel 75° és 72° szinusza, ill. koszinusza egyenlő 15° és 18° koszinuszával ill. szinuszával, azért eredményeinket ugyanezen alakban kapnánk a $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ = \frac{36^\circ}{2} - \frac{30^\circ}{2}$ egyenlőség alapján. Más alakra jutunk, ha előbb $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$ koszinuszát számítjuk, majd a félszög-képletekkel fejezzük be a számítást. 36° -kal együtt 54° függvényeit is ismerjük, ebből megkaphatjuk 27° -ét és $3^\circ = 30^\circ - 27^\circ$ alapján is számíthatunk. A dolgozatokban mindezen módok előfordultak.

II. megoldás (a feladat első részére). A $c = (\sqrt{5} + 1)/4$ szám pozitív és 1-nél kisebb, így van olyan φ hegyes szög, amelynek c a koszinusza. Megmutatjuk, hogy $5\varphi = 180^\circ$, tehát $\varphi = 36^\circ$. A kétszeres szög koszinuszára ismert azonosságot kétszer alkalmazva:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = \frac{6 + 8\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Ebből látjuk, hogy 2φ is még hegyes szög: $2\varphi < 90^\circ$. A 4-szeres szögre térvé:

$$\cos 4\varphi = 2 \cos^2 2\varphi - 1 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} = -c = -\cos \varphi,$$

tehát $90^\circ < 4\varphi < 180^\circ$. Ezek szerint 4φ és φ olyan tompa, ill. hegyes szög, melyek koszinuszának abszolút értéke megegyezik. Ebből következik, hogy kiegészítő szögek, $4\varphi + \varphi = 5\varphi = 180^\circ$. Ezt akartuk bizonyítani.

Csákó György (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. IV. o. t.).

Megjegyzés. Hasonló gondolatmenettel meghatározhatjuk $\cos 36^\circ$ -ot, ha nem ismerjük is előre az értékét. A $2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ és a $3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$ is kiegészítő szögek, tehát $\varphi = 36^\circ$ -ra

$$\cos 3\varphi + \cos 2\varphi = 0.$$

Ebből szeretnék $x = \cos \varphi$ -t meghatározni.

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= 2 \cos^2 \varphi - 1 = 2x^2 - 1, \\ \cos 3\varphi &= (2 \cos^2 \varphi - 1) \cos \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi = \\ &= 2 \cos^3 \varphi - \cos \varphi - 2(\cos \varphi - \cos^3 \varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Így a

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

egyenletre jutottunk. Ennek egy gyöke $x = -1$ (és ez nyilván nem $\cos 36^\circ$). A bal oldalból $(x + 1)$ -et kiemelve

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x + 1)(4x^2 - 2x - 1).$$

$\cos 36^\circ$ a második tényező pozitív 0-helye, vagyis

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.