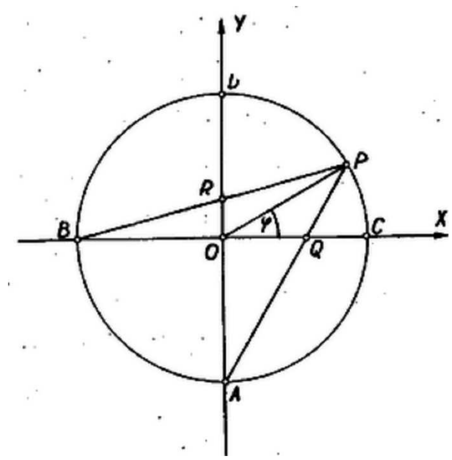
a) A feladatot alkalmas koordinátarendszer bevezetésével oldjuk meg. Válasszuk tengelyekül az OB, OA egyeneseket úgy, hogy B és A a negatív féltengelyeken legyenek[1] és egységül a kör sugarát, tehát A és B koordinátái $(0;-1)$, ill. $(-1;0)$. P helyzetét az OP sugár φ forgásszögével határozzuk meg, a Q és R pontokét pedig koordinátáikkal. P koordinátái $(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$; P minden A-tól és B-től különböző helyzetét tekintetbe kell vennünk a körön, tehát $0° \leq \varphi < 360°$, $\varphi \neq 180°$, $270°$.



1. ábra

A Q-t és R-et meghatározó egyenesek egyenlete:

$$PA: \quad y+1=\frac{\sin\varphi+1}{\cos\varphi}x \quad (\varphi\neq 90°),$$
$$OB: \qquad y=0,$$
$$PB: \quad y=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1}(x+1),$$
$$OA: \qquad x=0,$$

ennélfogva a pontok koordinátái, mint φ függvényei:

$$Q\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi+1},\ 0\right), \qquad \text{ill.} \qquad R\left(0,\ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1}\right),$$

és látható, hogy a Q abszcisszájára nyert képlet $\varphi = 90°$ mellett is érvényes.

Amíg $0° \leq \varphi < 180°$, Q befutja a CB átmérőt a B pont kivételével (C az $(1;0)$ pont), a $180° < \varphi < 270°$ értékekre befutja az OB sugár B-n túli meghosszabbítását, végül a $270° < \varphi < 360°$ értékekre az OC sugár C-n túli meghosszabbítását. Így ha P a III környegyedben van, Q abszcisszája kisebb -1-nél, egyébként nagyobb nála. – R viszont a $0° \leq \varphi < 180°$ értékekre az OD félegyenest futja be (D a $(0;1)$ pont), $180° < \varphi < 360°$, $\varphi \neq 270°$ mellett pedig az O kezdetű, A-n átmenő félegyenest, fordított sorrendben, az A pont kivételével. Így ha P a III negyedben van, R ordinátája kisebb -1-nél, egyébként nagyobb nála.

b) A Q és R közti kapcsolat megállapításához Q abszcisszája és R ordinátája között kell összefüggést keresnünk. Ehhez célszerű mindkettőt φ-nek egyetlen szögfüggvényével kifejezni, azután ezt a két kifejezésből kiküszöbölni. Erre a $t = \operatorname{tg}\varphi/2$ kifejezés a legalkalmasabb (hacsak $\varphi/2 \neq 90°$, de ezt az értéket már kizártuk):

(1)
$$x_Q = x = \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}+1} = \frac{1-t^2}{1+2t+t^2} = \frac{(1+t)(1-t)}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t},$$

(mindig érvényes, mert a $t=-1$, $\varphi/2 = 135°$ értéket kizártuk) és

(1*a*)
$$y_R = y = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1} = t.$$

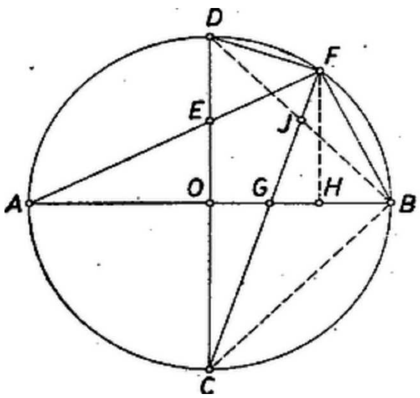
t kiküszöbölésével az x és y közötti keresett összefüggés:

(2)
$$x=\frac{1-y}{1+y}, \qquad \text{másképpen} \qquad y=\frac{1-x}{1+x}.$$

[1] Ezzel a választással egyszerűbb lesz a 662. gyakorlattal való összehasonlítás.

Láttuk, hogy Q nem eshet B-be, ezért az $x=-1$ érték ki van zárva, tehát x minden értékéhez egy és csak egy y tartozik, azaz minden Q-hoz egy és csak egy R pont, a szerkesztő eljárásnak megfelelően. (2) így is írható:

$$(1+x)(1+y)=2. \tag{3}$$



2. ábra

c) B, C, A, D, P pontunk szerepét átadva a 662. gyakorlat A, B, C, D, ill. F pontjának (2. ábra), R, ill. Q szerepét az ottani E, ill. G kapja és

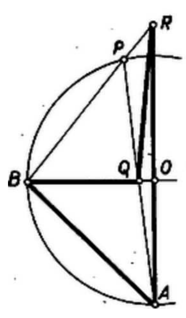
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{tg}\frac{BOF\sphericalangle}{2}=\operatorname{tg}BAF\sphericalangle=\frac{OE}{AE}=\frac{1}{2},$$

tehát a 662. gyakorlat *b)* részében feladatunknak egy határozott φ értékkel adódó esetét vizsgáltuk. Ezzel (1) alapján, az ottani eredménnyel megegyezésben:

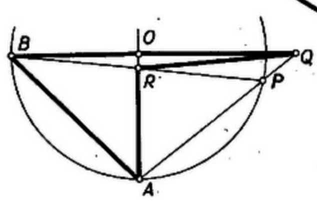
$$OG=OQ=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3},\qquad 3OG=1=OB.$$

d) Az $ABQR$ négyszög a $0^\circ<\varphi<90^\circ$ értékekre hurkolt (1. ábra), területe nincs értelmezve. A $90^\circ\le\varphi<180^\circ$ és $270^\circ<\varphi<360^\circ$ értékekre a terület az ABO és QRO háromszögek területének összege (3–4. ábrák):

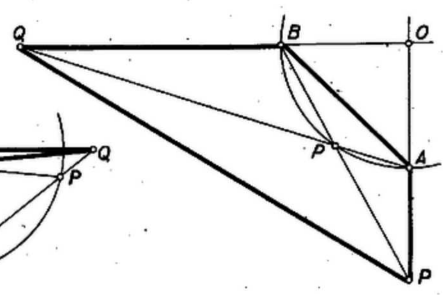
$$T=\frac{1}{2}+\frac{|x|\cdot y}{2},\qquad \text{ill.}\qquad T=\frac{1}{2}+\frac{x\cdot|y|}{2}.$$



3. ábra,



4. ábra,



5. ábra

Az első intervallumon végighaladva $|x|$ és $|y|$ növekednek, a másodikon végighaladva x és $|y|$ fogynak, így T nem állandó. Végül a $180^\circ<\varphi<270^\circ$ intervallumban (5. ábra, az alsó P pont helyesen R):

$$T=QRO-ABO=\frac{1}{2}|x|\cdot|y|-\frac{1}{2}=\frac{-x}{2}\cdot\frac{1-x}{-1-x}-\frac{1}{2}=$$
$$=-\frac{x^2+1}{2(x+1)}=\frac{1-x}{2}-\frac{1}{x+1},$$

ugyanis – mint fent megjegyeztük – itt mindig $x<-1$, $y<-1$, ezért $|x|=-x$, (2)-ben y számlálója pozitív, nevezője negatív. Az utolsó alak első tagja elsőfokú függvény, második tagja elsőfokú törtfüggvény, képük egyenes, ill. hiperbola, így a T értékét megadó függvény képe nem egyenes, T értéke itt sem állandó.

(Az $ABRQ$ négyszög területe viszont a $180^\circ < \varphi < 270^\circ$ intervallum kivételével állandó, mert átlói, BQ és AR merőlegesek, hosszuk $1+x$, ill. $1+y$ – a fentiek szerint pozitívok – és így (3) felhasználásával

$$T = \frac{1}{2} \cdot BQ \cdot AR = \frac{1}{2}(1+x)(1+y) = 1.$$

A $180^\circ < \varphi < 270^\circ$ értékekre az $ABRQ$ négyszög hurkolt.)

Kunszt Zoltán (Pápa, Türr I. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Amíg $\varphi < 180^\circ$, OR értékét az RBO derékszögű háromszögből a kerületi szög tételének felhasználásával is egyszerűen kapjuk. Így ugyanis R mindig az OD félegyenesen van, ezért

$$RBO\sphericalangle = PBC\sphericalangle = \frac{POC\sphericalangle}{2} = \frac{\varphi}{2},\ OR = BO \operatorname{tg} RBO\sphericalangle = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t.$$

Míg φ 180°-tól 360°-ig növekszik – vagy ami ugyanaz, -180°-tól 0°-ig –, csak annyi a változás, hogy OR negatívját kell vennünk, mert a BAC félkör a BDC félkör tükörképe az X-tengelyre nézve. Kifejezésünk tehát helyes, mert egy szög tangensének negatívja egyenlő a szög negatívjának tangensével.

Hasonlóan látható be, hogy a QAO háromszögből nyert

$$OQ = AO \operatorname{tg} QAO\sphericalangle = \operatorname{tg} PAD\sphericalangle = \operatorname{tg}\frac{POD\sphericalangle}{2} = \operatorname{tg}\frac{90^\circ - \varphi}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-t}{1+t}$$

kifejezés is mindig helyes.