

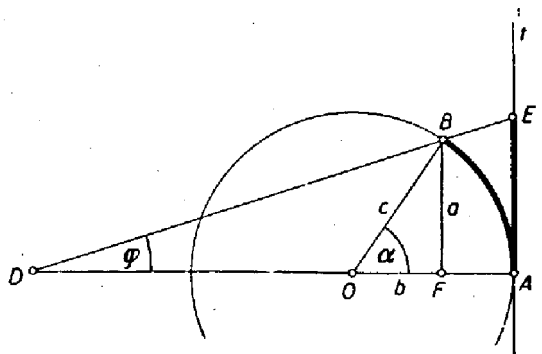
I. megoldás. I. Az utolsó kivételével mindegyik példában egy-egy 45° alatti, ill. fölötti hegyes szögre kapunk közelítést, az utolsó, egyenlő szárú háromszögből pedig 45° -ra. Így a $0^\circ - 90^\circ$ intervallum közepén és 8 kb. egyenletesen elosztott helyén kapjuk meg a közelítés mértékét.

Az alábbi táblázatban α az a befogóval szemben fekvő hegyes szögnek a függvénytáblázatból számított „pontos” értékét, α' pedig ugyanennek az adott képlettel számított közelítő értékét jelenti. Az utóbbit tetszés szerinti pontosságig számíthatnók, a -ban viszont a táblázat 4 értékes jegynyi pontosságára vagyunk korlátozva, ezért α' -t is csak 4 tizedesre számítjuk. A táblázat kerekítéseiből és az interpolációból eredő hibák kiegyenlítésére számítva α értéke gyanánt a $\sin \alpha$ -ból, $\cos \alpha$ -ból, $\operatorname{tg} \alpha$ -ból és $\operatorname{ctg} \alpha$ -ból visszakeresett eredmények közepét vettük.

	a	b	c	α (fok) α (radián)	$\alpha' = \frac{3a}{2c+b}$	$d = \alpha' - \alpha$	$\delta = \frac{ d }{\alpha}$	α''
I.	11	60	61	$10,39^\circ = 0,1813$	0,1813	0	0 %	$10,384^\circ$
II.	51	140	149	$20,02^\circ = 0,3494$	0,3493	$-1 \cdot 10^{-4}$	0,03 %	$20,006^\circ$
III.	11	$\sqrt{3}$	2	$30^\circ = 0,5236$	0,5234	$-2 \cdot 10^{-4}$	0,04 %	$29,975^\circ$
IV.	88	105	137	$39,96^\circ = 0,6974$	0,6966	$-8 \cdot 10^{-4}$	0,12 %	$39,894^\circ$
V.	1	1	$\sqrt{2}$	$45^\circ = 0,7854$	0,7836	$-18 \cdot 10^{-4}$	0,23 %	$44,879^\circ$
IV.	105	88	137	$50,04^\circ = 0,8734$	0,8702	$-32 \cdot 10^{-4}$	0,37 %	
III.	$\sqrt{3}$	1	2	$60^\circ = 1,0472$	1,0392	$-80 \cdot 10^{-4}$	0,76 %	
II.	140	51	149	$69,98^\circ = 1,2214$	1,2034	$-180 \cdot 10^{-4}$	1,5 %	
I.	60	11	61	$79,61^\circ = 1,3895$	1,3534	$-361 \cdot 10^{-4}$	2,6 %	

(Példáinkban mind a négy könnyen számítható,) majd a táblázat felhasználásával számítottuk át radiánra.

A közelítés finomabb vagy durvább voltát kézenfekvő α' -nek α -tól való $d = \alpha' - \alpha$ eltéréséből megítélni. Gyakorlati célra azonban jellemzőbb és használatosabb a d/a hányados, ill. a $100d/a$ ún. relatív (százalékos) hiba. Mint látjuk, d mindig negatív, a közelítő érték kisebb a valódinál, és d abszolút értéke a -val rohamosan növekszik, $|d|/a$ már kisebb mértékben. 45° -on aluli szögekre a relatív hiba $1/4\%$ -nál kisebb, így a közelítés jónak, 20° -on alul igen jónak mondható. Nyilvánvaló tehát, hogy ezzel az eljárással a derékszögű háromszög kisebb hegyes szögét célszerű közelíteni.



II. Legyen B vetülete OA -n F , és az OFB derékszögű háromszögben $\angle FOB = \alpha$, $FB = a$, $OF = b$, $OB = c$, így $DA = 3c$, $DF = 2c + b$. Ekkor egyrészt a DBF és DEA háromszögek hasonlóságából

$$AE : DA = FB : DF, \text{ és így } AE = \frac{DA}{DF} \cdot FB = \frac{3ca}{2c+b} = c \cdot \frac{3a}{2c+b} = c \cdot \alpha',$$

másrészt az AB ív hossza $OA \cdot \alpha = c \cdot \alpha$ (α radiánban). Eszerint az AE szakasz ugyanazon mértékben közelíti az AB ívet, mint a képletünkben számított szögérték a háromszög szögét.

Dobó Ferenc (Budapest, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás (a feladat II. részére). Legyen $\angle BDO = \varphi$, ekkor $\angle DBO = \alpha - \varphi$ és így a BDO háromszögből a szinusz-tétellel

$$\sin \varphi : \sin(\alpha - \varphi) = OB : OD = 1 : 2.$$

Innen az addíció-tétel felhasználásával

$$[\sin(\alpha - \varphi) =] \quad \sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi = 2 \sin \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{2 + \frac{b}{c}} = \frac{a}{2c + b},$$

végül $AE = DA \operatorname{tg} \varphi = 3c \operatorname{tg} \varphi$ -vel, ismét a fenti eredményre jutunk.

László Erika (Budapest, Varga K. lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. I. A szóban forgó közelítő eljárásnak kényelmetlen eleme a radiánban való számolás. Radiánból fokra $180/\pi$ -vel való szorzással térhetünk át. Ha ebben $\pi = 3,14159\dots$ helyett az ismert (Archimédészről származó) $22/7 = 3,14285\dots$ értéket használjuk, akkor fokban mérve

$$a \approx \frac{180 \cdot 7}{22} \cdot \frac{3a}{2c + b} = \frac{630}{11} \cdot \frac{3a}{2c + b} = \frac{1890a}{11(2c + b)}.$$

A $22/7$ érték kb. 0,04%-kal nagyobb π -nél, ezért a $630/11$ arányossági tényező kb. 0,04%-kal kisebb a kelleténél. Eszerint az utóbbi képlet is alsó közelítést ad, és hibája valamivel nagyobb. Az adott számpéldákra az utóbbi képlet szerinti közelítő értéket (45° -ig) a táblázat a'' rovata tünteti fel.

2. Néhányan táblázat nélkül számították át fok-adataikat radiánra, és pedig a $\pi \approx 3,14$ közelítő érték alapján. Ebben csak 3 értékes jegy van, ennél fogva ugyanez áll minden vele végzett szorzásra, osztásra is. Így nem volt értelme a fok-eredményeket előzetesen 5 értékes jegyre kiszámítani (5 vagy többjegyű táblázatból).