[1]

$\sqrt{2}=1{,}414\,213\ldots$ és $\sqrt{51}=7{,}141\,428\ldots$, tehát az állítás igaz. Eszerint fennáll a következő közelítő egyenlőség:

$$\sqrt{51}\approx 7+\frac{\sqrt{2}}{10}, \tag{1}$$

amiből négyzetre emeléssel és rendezéssel

$$\sqrt{2}\approx\frac{99}{70}=1{,}41\,428\ldots, \tag{2}$$

Ez ugyancsak 5 értékes jegyben egyezik meg $\sqrt{2}$-vel.

A 945. feladat[2] az $x_1=2,\ \ y_1=3$, és $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ esetén $x_{k+1}=3x_k+2y_k,\ \ y_{k+1}=4x_k+3y_k$ képletekkel adott sorozatokból adódó y_k/x_k törteket adta meg mint $\sqrt{2}$ közelítő értékeit. Ezekben a sorozatokban a harmadik tag $x_3=70,\ \ y_3=99$.

Simonyi Ernő (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Vajon az említett sorozatpárból lehet-e kapni az 51-en felül további olyan a számokat, melyeknek négyzetgyökében az első valahány tizedes jegy megegyezik $\sqrt{2}$ tizedestört alakjának egymás utáni jegyeivel, vagyis amelyre

$$\sqrt{a}\approx b+\frac{\sqrt{2}}{10},\qquad\text{és ebből}\qquad \sqrt{2}\approx\frac{50(a-b^2)-1}{10b}? \tag{3}$$

A $\sqrt{2}$-re adódó közelítő érték nevezője tehát 0-ra, számlálója pedig 49-re vagy 99-re végződik. Ilyen x_k, y_k párokat akarunk tehát keresni. Könnyítést jelentenek 0-ra végződő nevező keresésében az 1062. feladatban[3] nyert

$$x_k=6x_{k-1}-x_{k-2}=34x_{k-2}-x_{k-4}=198x_{k-3}-x_{k-6}$$

kifejezések, amelyekkel az y-sorozat tagjainak kiszámítása nélkül juthatunk előre. Egyelőre elég a tagok utolsó jegyét vizsgálni. $x_1=2$, $x_2=12$ és $x_3=70$-ből x_4 utolsó szemjegye 8-as, ugyanígy x_5-é is, majd x_6-é ismét 0. A fenti 3-ik kifejezéssel – és az 1061. feladatban nyert $x_0=0$-val $x_6=198\cdot 70-0=13\,860$. Egyszersmind látjuk, hogy az x sorozat minden harmadik tagja 0-ra végződik, köztük pedig váltakozva két–két 2-re, ill. 8-ra végződő tag áll. Az 1062. feladat további képleteivel $y_6=19\,601$, ez nem felel meg (3)-ban a számlálónak. Könnyű belátni azonban[4] $y_k=198y_{k-3}-y_{k-6}$, és $y_0=1$, $y_3=99$-ből, hogy az y_{3k} tagok váltakozva 1-re és 9-re végződnek, tehát y_9 egyjegyű végződése megfelelő. Valóban, $y_9=198\cdot 19\,601-99=3\,880\,899=50\cdot 77\,618-1$, és mivel $x_9=198\cdot 13\,860-70=2\,744\,210=10b$-ből $b=274\,421$, azért $50(a-b^2)-1=y_9$-ből $a=b^2+1(1+y_9)/50=75\,306\,962\,859$ egy a kívánt tulajdonsággal bíró szám. Ezzel

$$\sqrt{a}=274\,421,\ \underbrace{141\,421\,356\,237\,3}\ 140\ldots,$$

és itt a tizedes vessző után $\sqrt{2}$-nek 13 helyes jegye áll.

---

[1] Lásd K. M. L. 23 (1961/9) 62. o.
[2] K. M. L. 19 (1959/10) 56. o.
[3] K. M. L. 23 (1961/10) 64. o.
[4] K. M. L. 23 (1961/10) 64. o.