

I. A feltevés szerint az a , b , c természetes számok egy derékszögű háromszög oldalhosszai. Az (1)-beli negyedik kifejezés beszorzással és a feltevés alapján

$$(3) \quad 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

helyettesítéssel így írható:

$$(4) \quad 2(c+a)(c+b) = 2c^2 + 2(ab+ac+bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = (a+b+c)^2,$$

tehát ez a szorzat az $a+b+c$ természetes szám négyzete.

Az (1) alatti második és harmadik szorzat úgy áll elő a negyediktől, hogy a helyett $-a$ -t, ill. b helyett $-b$ -t írunk, az első szorzat pedig e két változtatás egyidejű végrehajtásával. Mindhárom változtatás mellett érvényben marad (3), ezért az első három szorzat rendre egyenlő a következő négyzetekkel:

$$(-a-b+c)^2 = (a+b-c)^2, \quad (-a+b+c)^2, \quad (a-b+c)^2,$$

ahol az alapok ismét egész számok. Eszerint az első állítás helyes. – (A (4) és belőle következő egyenlőségek minden derékszögű háromszögben érvényesek, ugyanis megállapításukban nem használtuk ki a , b , c egész voltát.)

II. Vegyük (4) mindkét oldalának pozitív négyzetgyökét:

$$\sqrt{2(c+a)(c+b)} = a+b+c = (c+a) + (c+b) - c.$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = c+a$, $y_1 = c+b$ számpárra

$$\sqrt{2x_1y_1} = x_1 + y_1 - c, \quad x_1 + y_1 - \sqrt{2x_1y_1} = c,$$

azaz teljesül a (2) alatti második egyenlet.

Hasonlóan kapunk megoldásokat ugyanezen egyenletre, ha vesszük az (1) alatti 2. és 3. szorzatból kapott egyenlőség mindkét oldalának pozitív négyzetgyökét és a jobb oldalon kis átalakítást végzünk:

$$\begin{aligned} \sqrt{2(c-a)(c+b)} = -a+b+c = (c-a) + (c+b) - c \text{ -ből} \\ x_2 = c-a, \quad y_2 = c+b, \\ \sqrt{2(c+a)(c-b)} = a-b+c = (c+a) + (c-b) - c \text{ -ből} \\ x_3 = c+a, \quad y_3 = c-b, \end{aligned}$$

ugyanis a háromszögegyenlőtlenség folytán $-a+b+c > 0$ és $a-b+c > 0$.

Az (1) alatti első szorzatra kapott egyenlőség viszont ugyanígy (2) első egyenletére ad megoldást:

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)} = a+b-c = c - (c-a) - (c-b)$$

-ből, ahol a háromszög-egyenlőtlenség szerint $a+b-c > 0$, $x_0 = c-a$, $y_0 = c-b$ -vel $\sqrt{2x_0y_0} = c - x_0 - y_0$, vagyis valóban teljesül

$$x_0 + y_0 + \sqrt{2x_0y_0} = c.$$

Ezek szerint ha c egy pythagorászi számhármas átfogószáma, akkor a (2) egyenletek megoldhatók egész számokban, sőt pozitív egész számokban, az

$$\begin{aligned} x_0 = c-a, \quad y_0 = c-b, \quad \text{ill.} \quad x_1 = c+a, \quad y_1 = c+b, \\ x_2 = c-a, \quad y_2 = c+b, \\ x_3 = c+a, \quad y_3 = c-b \end{aligned}$$

számpárok – ahol a és b a c átfogószámhoz tartozó befogószámok – mindenesetre megoldást adnak. Ezekon felül magától értetődő (ún. triviális) megoldás mindkét egyenletre $x = c$, $y = 0$, továbbá a másodikra $x = c$, $y = 2c$, és természetesen bármely megoldásban x és y felcserélésével ismét megoldást kapunk. Ezeket alább figyelmen kívül hagyjuk.

Megmutatjuk még, hogy a fentiek felül más megoldásuk nincs a (2) egyenleteknek. Ezeket

$$\sqrt{2xy} = c - x - y, \quad -\sqrt{2xy} = c - x - y$$

alakban írva és négyzetre emelve a

$$2xy = c^2 - 2cx + x^2 - 2cy + y^2 + 2xy,$$

másképpen a

$$(5) \quad (c-x)^2 + (c-y)^2 = c^2$$

egyenletre jutunk. Ez mindkét egyenletünknek következménye, vagyis a (2) egyenleteket más gyök nem elégítheti ki, mint (5)-öt. Ez azt jelenti, hogy vagy $|c-x|$, $|c-y|$ egyike 0, a másik c , vagy e két szám (mint befogószám) és c pythagorászi számhármast alkot. Így valóban a két egyenlet összes megoldásai csak az $x=c, y=0$; $x=c, y=2c$ számpárok, továbbá ha létezik c átfogószámmal pythagorászi számhármast, minden ilyen a, b, c számhármashoz az $x=c \mp a, y=c \mp b$ számpárok. Azt az előzőkben már tisztáztuk, hogy ezek közül melyik az első és melyik a második egyenlet megoldásai.

III. Meg kell keresnünk a $c=13$ és $c=50$ átfogószámokhoz tartozó befogó számpárokat (ha egyáltalán léteznek). Minden pythagorászi számhármast megad a következő képlethármas:

$$(6) \quad a = k(u^2 - v^2), \quad b = k \cdot 2uv, \quad c = k(u^2 + v^2),$$

ahol u, v relatív prim természetes számok, egyikük páros, és $u > v$, továbbá k tetszőleges szerinti természetes szám. $k=1$ esetén alap hármast kapunk, azaz a, b, c relatív prímekek.

Mivel $c=13$ törzsszám, itt csak $k=1$ lehet, másrészt $u^2 + v^2 = 13$ csak $u=3, v=2$ -vel adódik ki, tehát a számhármast: 5, 12, 13. Így a (2) alatti első egyenlet megoldásai: $x_0 = 13 - 5 = 8, y_0 = 13 - 12 = 1$, a második egyenletéi pedig: $x_1 = 18, y_1 = 25; x_2 = 8, y_2 = 25; x_3 = 18, y_3 = 1$.

$c=50 = 2 \cdot 5^2$. Nem lehet $k=1$, vagy 5, mert 50, ill. 10 páros, nem állítható elő egy páros és egy páratlan négyzetösszegeként. Így vagy $k=2$ és $u^2 + v^2 = 25$ – amiből $u=4, v=3$ –, vagy $k=10$ és $u^2 + v^2 = 5$, amiből $u=2, v=1$, tehát két számhármast kapunk: 14, 48, 50 és 30, 40, 50. Ezekből a megoldást adó számpárok az első egyenletre 2, 36 és 10, 20, a másodikra pedig 36, 98; 2, 64; 64, 98; 20, 90; 10, 80; 80, 90.

Kobzos László (Vác, Lőwy S. gépip. t. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A II. szakasz második részében nemcsak azt láttuk be, hogy a találaton kívül nincs egész megoldása az egyenleteknek, hanem megkaptuk ezeket a megoldásokat az első rész és I. felhasználása nélkül.

2. Az első állítás a (6) képlet hármast felhasználásával is igazolható, a négy szorzat rendre így alakul:

$$[2kv(u-v)]^2, \quad [2kv(u+v)]^2, \quad [2ku(u-v)]^2, \quad [2ku(u+v)]^2.$$