

Első lépésül az $x - 1$ -gyel való oszthatóság feltételét állapítjuk meg. Polinomunk így is írható:

$$f(x) = (Ax^{n+2} - A) + (Bx^{n+1} - B) + (x - 1) + (A + B).$$

Itt az első három kéttagú kifejezés osztható $x - 1$ -gyel, mert

$$(1) \quad A(x^{n+2} - 1) = A(x - 1)(x^{n+1} + x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1),$$

$$(2) \quad B(x^{n+1} - 1) = B(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1),$$

ennélfogva $f(x)$ akkor és csak akkor lesz $x - 1$ -nek és egy további polinomnak a szorzata, ha a maradék – ti. a negyedik kéttagú – eltűnik:

$$A + B = 0, \quad \text{azaz} \quad B = -A.$$

Ekkor $f(x)$ -nek $(x - 1)$ -gyel való osztásánál a hányados (1) és (2) alapján

$$\begin{aligned} & A(x^{n+1} + x^n + \dots + x + 1) + B(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) + 1 = \\ & = A(x^{n+1} + x^n + \dots + x + 1) - A(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) + 1 = Ax^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

$f(x)$ akkor és csak akkor osztható $(x - 1)$ négyzetével is, ha ez a hányados is osztható $x - 1$ -gyel. Ámde

$$\begin{aligned} Ax^{n+1} + 1 &= (Ax^{n+1} - A) + (A + 1) = A(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) + \\ &+ (A + 1), \end{aligned}$$

és így az oszthatóság feltétele a fent kimondott elvet ismét alkalmazva

$$A + 1 = 0, \quad \text{azaz} \quad A = -1, \quad \text{és} \quad B = 1.$$

Ezek szerint a polinom kívánt alakja:

$$x^{n+2} + x^{n+1} + x - 1.$$

Loparits Pál (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Az $A + B = 0$ feltételhez egyszerűbben is eljuthatunk. Ha a feladat feltétele teljesül, akkor $f(1) = 0$. De $f(1) = A + B + 1 - 1 = A + B$, azaz $A + B = 0$, $B = -A$.