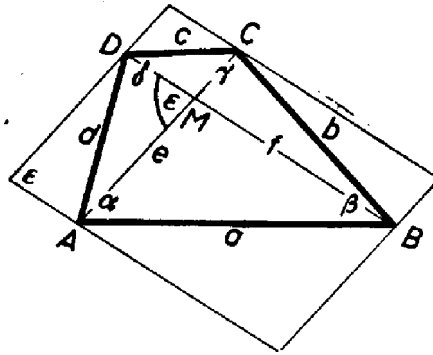


I. Legyenek az ABCD négyszög oldalai $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, egyik átlója $BD = f$, az ezzel szemben levő szögek $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCD = \gamma$, végül a területe t .



Az ABD és CBD háromszögekből a BD átlóra és a négyszög 4-szeres területére

$$(1) \quad f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma,$$

$$(2) \quad 2ad \sin \alpha + 2bc \sin \gamma = 4t.$$

Átrendezéssel (1)-ből

$$(3) \quad 2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma = a^2 + d^2 - b^2 - c^2.$$

Képezzük (2) és (3) négyzetösszegét, mindjárt figyelembe véve a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{és} \quad \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y) \quad \text{azonosságokat:}$$

$$4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd \cos(\alpha + \gamma) = 16t^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2.$$

Innen

$$(4) \quad 16t^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - [(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)]^2 - 8abcd \cos(\alpha + \gamma)^1$$

Adott a, b, c, d mellett a jobb oldal első 3 tagja állandó, ezért $16t^2$ és vele t akkor a legnagyobb, ha az utolsó tag a legnagyobb; ez pedig akkor áll be, ha $\cos(\alpha + \gamma)$ a lehető legkisebb értékét, -1 -et veszi fel. Ekkor

$$16t_{\max}^2 = 256 + 1296 - [65 - 45]^2 + 1152 = 2304,$$

ahonnan $t_{\max} = 12$ területegység, hacsak létezik olyan négyszög, melynek egymás utáni oldalai az adott szakaszok, továbbá, amelyben a $\cos(\alpha + \gamma) = -1$, azaz $\alpha + \gamma = 180^\circ$ kiegészítő feltétel is teljesül. Ekkor $\cos \gamma = -\cos \alpha$, és így (3)-ból, majd (1)-ből

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{5}{13}, \quad f \approx 7,671 \text{ egység.}$$

Ez mind az a, d , mind a b, c oldalpárral háromszöget alkot, tehát a kérdéses négyszög létezik.

Azt is látjuk a szög-feltételből, hogy négyszögünk húrnégyszög, és hogy bármely a, b, c, d oldalhosszak mellett – ha egyáltalán létezik a négyszög – a húrnégyszögnek van maximális területe.

II. (4) jobb oldalát a $\cos(\alpha + \gamma) = -1$ feltétel mellett kifejtve

$$16t_{\max}^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 8abcd.$$

Ebben a kifejezésben a, b, c, d mindegyike egyforma szerepet játszik, eszerint $t_{\max}$ értéke független az oldalak sorrendjétől (természetesen ismét számadatainktól is függetlenül).

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

¹(4)-et a K. M. L. 23 (1961/11) 132. o. aljáról készen átvehettük volna, azonban új olvasóinkra tekintettel inkább levezettük.