

Az idézett számhármass-párokban az 1, ill. 2 kitevőjű hatvány-összegek egyenlők, ugyanis I-ben: $38 + 108 + 268 = 8 + 168 + 238 = 414$, ill. $38^2 + 108^2 + 268^2 = 8^2 + 168^2 + 238^2 = 84\,932$, hasonlóan II-ben: 90 621, ill. 4 549 468 547, III-ban: 909, ill. 414 041, végül IV-ben: 520, ill. 149 432 az összegek értéke. Eszerint az 1065. feladat tétele érvényes mind a négy számhármass-párra. (A 3-as kitevőjű hatványösszegek különbözőségének ellenőrzését mellőzhetjük, mert a feladat megoldását áttekintve látjuk, hogy a 3 kitevőjű hatványösszegek különbözőségét csak annak bizonyításában használtuk fel, hogy (1) az $m = 4$ érték mellett nem teljesül. Itt viszont nincs szó a 4 kitevőjű hatványösszegekről.) Eszerint bármely k -val teljesül $m = 1, 2, 3$ mellett pl. a

$$\begin{aligned} & 38^m + 108^m + 268^m + (8+k)^m + (168+k)^m + (238+k)^m = & \text{I}^* \\ & = 8^m + 168^m + 238^m + (38+k)^m + (108+k)^m + (268+k)^m \end{aligned}$$

egyenlőség. – A 6-tagú számcsoportoknak 4-tagúakká való egyszerűsödése nem jöhet létre 0-értékű tagok miatt, mert I^* tagjaiban a k szám csupa különböző szám mellett lép fel, így pedig legfeljebb egy tagot tehetünk 0-vá k alkalmas választásával. Az egyszerűsödés tehát csak úgy állhat be, ha alkalmas k -val I^* két oldalán két-két egyenlő alap lép fel, és ezek a tagok m minden értéke mellett kiesnek. Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy van ilyen k . Az egyenlő alapok egyikének (1)-ben tartalmaznia kell k -t, a másiknak viszont „ k -mentes”-nek kell lennie, ugyanis mind a k -mentes tagok, mind a k -t tartalmazó tagok egymás között különbözők. Nem lehet szó továbbá pl. a 38 és $38+k$ alapok egyenlőségéről sem, mert evvel $k = 0$, és I^* -ból minden tag kiesik. Ezek szerint a bal oldal mindegyik tagja a jobb oldal 2 tagjával lehet egyenlő, pl.

$$\begin{aligned} 38 &= 108 + k, & \text{vagy} & & 38 &= 268 + k, & \text{amiből} \\ k &= -70, & \text{ill.} & & k &= -230. \end{aligned}$$

Ha mind a $6 \cdot 2 = 12$ ilyen egyenletből a megfelelő k -t kiszámítva valamely k -értéket legalább 2-szer kapunk meg, éspedig I^* -nak két-két különböző tagjából, akkor ezzel a k értékkel I^* két oldalán valóban csak 4-4 különböző tag marad vissza. Mármost

$$\begin{aligned} 108 &= 38 + k\text{-ből} & k &= 70, & 108 &= 268 + k\text{-ből} & k &= -160; \\ 268 &= 38 + k & , & k &= 230, & 268 &= 108 + k & , & k &= 160; \\ 8 + k &= 168 & , & k &= 160, & 8 + k &= 238 & , & k &= 230; \\ 168 + k &= 8 & , & k &= -160, & 168 + k &= 238 & , & k &= 70; \\ 238 + k &= 8 & , & k &= -230, & 238 + k &= 168 & , & k &= -70. \end{aligned}$$

Ezek szerint I^* a $k = \pm 70, \pm 160$ és ± 230 számok mindegyikével 4-4 tagúra egyszerűsödik, pl. $k = -230$ -cal kiesnek 38 és $268 + k$, valamint $238 + k$ és 8, a maradék

$$108^m + 268^m + (-222)^m + (-62)^m \quad \text{és} \quad 168^m + 238^m + (-192)^m + (-122)^m$$

kifejezések értéke pedig $m = 1$ mellett 92, $m = 2$ mellett 136 616 és $m = 3$ mellett 9 329 168.

Általában, az I. és II. számhármass-párok közös

$$\begin{aligned} a_1 &= q + r, & a_2 &= p + r, & a_3 &= 2p + 2q + r; \\ b_1 &= r, & b_2 &= p + 2q + r, & b_3 &= 2p + q + r \end{aligned}$$

képletéből¹ a tétel alkalmazásával előálló

$$(2) \quad a_1, a_2, a_3, b_1 + k, b_2 + k, b_3 + k; \quad b_1, b_2, b_3, a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k$$

számhatos-párban

$$(3) \quad \begin{array}{llllll} a_1 = a_2 + k, & \text{és} & b_2 = b_3 + k, & \text{ha} & k = -p + q; \\ a_1 = a_3 + k, & \text{és} & b_1 = b_3 + k, & \text{ha} & k = -2p - q; \\ a_2 = a_1 + k, & \text{és} & b_3 = b_2 + k, & \text{ha} & k = p - q; \\ a_2 = a_3 + k, & \text{és} & b_1 = b_2 + k, & \text{ha} & k = -p - 2q; \\ a_3 = a_1 + k, & \text{és} & b_3 = b_1 + k, & \text{ha} & k = 2p + q; \text{ végül} \\ a_3 = a_2 + k, & \text{és} & b_2 = b_1 + k, & \text{ha} & k = p + 2q. \end{array}$$

¹Lásd az 1048. feladat fentebb idézett megoldását.

Innen a paraméterek $p = 30\,000$, $q = 200$, $r = 7$ értékrendszerével adódó II számhármass-párra is 6 megfelelő értéket kapunk:

$$k = \pm 29\,800, \quad \pm 30\,400, \quad \pm 60\,200.$$

A III és IV számcsoportok esetében a fentiek szerinti 12 egyenlőség mindegyikéből más-más k -érték adódik, abszolút értékben nagyság szerint rendezve a következők:

$$\text{III-ből: } \pm 95, \quad \pm 104, \quad \pm 395, \quad \pm 401, \quad \pm 496, \quad \pm 499;$$

$$\text{IV-ből: } \pm 136, \quad \pm 158, \quad \pm 186, \quad \pm 206, \quad \pm 342, \quad \pm 344.$$

Ezekkel a 6-tagú csoportokból csak 1–1 tag esik ki, tehát a csoportok valóban csak 5-tagúra egyszerűsödhetnek.

Seprődi László (Budapest, Fáy A. g. IV. o.)