

I. megoldás. Képezzük (1) jobb és bal oldalának D különbségét. Ezt úgy írhatjuk, mint két négyzetekből álló különbség különbségét, ezeket pedig szorzattá alakítjuk:

$$\begin{aligned} D &= [(x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2n})^2 - (x^{2n+1})^2] - \\ &\quad - [(y^{2n+1})^2 - (y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \dots \pm 2yx^{2n})^2] = \\ &= (2x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2n})(-2x^{2n-1}y^2 + \\ &\quad + 2x^{2n-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2n}) - (2y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \\ &\quad - \dots \pm 2yx^{2n})(2y^{2n-1}x^2 - 2y^{2n-3}x^4 + \dots \mp 2yx^{2n}). \end{aligned}$$

A közös $2x$, $2xy^2$, ill. $2y$, $2yx^2$ tényezők kiemelése után

$$\begin{aligned} D &= 4x^2y^2(x^{2n} - x^{2n-2}y^2 + x^{2n-4}y^4 - \dots \pm y^{2n})(-x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 - \\ &\quad - \dots \pm y^{2n-2}) - 4x^2y^2(y^{2n} - y^{2n-2}x^2 + y^{2n-4}x^4 - \dots \pm \\ &\quad \pm x^{2n})(y^{2n-2} - y^{2n-4}x^2 + \dots \mp x^{2n-2}). \end{aligned}$$

Páros n esetén a zárójeles kifejezések utolsó tagjában mindenütt a felső előjel érvényes, ezért a két szorzat megfelelő tényezői csak a tagok sorrendjében különböznek, tehát $D = 0$. Ugyanezt kapjuk páratlan n esetén is, amikor az utolsó tagokban az alsó előjel érvényes, ugyanis ekkor D kivonandójának többtagú tényezői az első tag megfelelő tényezőjéből (-1) -gyel való szorzással állnak elő, és ezért D kivonandója a kisebbítendőnek $(-1)^2 = 1$ -szerese.

Eszerint minden n természetes szám mellett $D = 0$, tehát (1) érvényes.

Fekete Tamás (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Ha $x \neq 0$, akkor az (1) bal oldalán álló első polinom tagjai, az első tagot nem tekintve, olyan n tagú mértani sorozatot alkotnak, melynek kezdő tagja $-2x^{2n-1}y^2$, és hányadosa $-y^2/x^2$. A hányados minden valós x , y -ra különbözik 1-től, ezért a polinom az ismert összeg-képlet felhasználásával zárt alakban felírható:

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 \dots \pm 2xy^{2n} &= x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 \frac{\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)^n - 1}{-\frac{y^2}{x^2} - 1} = \\ &= x^{2n+1} - 2xy^2 \frac{(-y^2)^n - x^{2n}}{-y^2 - x^2} = x^{2n+1} - 2xy^2 \frac{x^{2n} + (-1)^{n+1}y^{2n}}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

A második polinom úgy áll elő az elsőből, hogy x -et és y -t felcseréljük. Ezért ha $y \neq 0$, így írható:

$$y^{2n+1} - 2yx^2 \frac{y^{2n} + (-1)^{n+1}x^{2n}}{y^2 + x^2}.$$

A két kifejezésben szereplő tört páratlan n esetén azonos, páros n esetén pedig egyik a másiknak (-1) -szerese; összefoglalva: bármely (pozitív egész) n mellett egyik a másiknak $(-1)^{n+1}$ -szerese. Ennélfogva

$$(2) \quad \frac{x^{2n} + (-1)^{n+1}y^{2n}}{x^2 + y^2} = z$$

jelöléssel a két polinom így írható:

$$x^{2n+1} - 2xy^2z, \quad y^{2n+1} - 2(-1)^{n+1}yx^2z.$$

Most már négyzetösszegük

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} - 4x^2y^2z[x^2 + (-1)^{n+1}y^{2n}] + 4x^2y^2z^2(y^2 + x^2).$$

Az utolsó tagban $z(y^2 + x^2)$ helyére (2) számlálóját írva ez a részlet az előtte állóval együtt 0-t ad, tehát a négyzetösszeg értéke $x^{4n+2} + y^{4n+2}$, az állításnak megfelelően.

Ha x és y közül valamelyik 0, akkor az azonosság nyilvánvalóan fennáll.

Bíró Ilona (Miskolc, Herman O. lg. IV. o. t.)