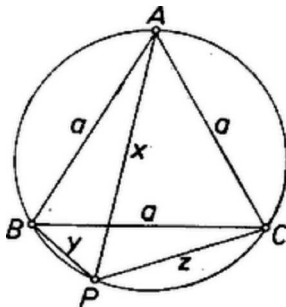


I. megoldás. Legyen az ABC háromszög oldala a . Abban a speciális esetben, ha P pl. az A csúcsba esik, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 0 + a^2 + a^2 = 2a^2$, azt kell tehát megmutatnunk, hogy a kérdéses négyzetösszeg értéke P minden helyzetében $2a^2$. A szimmetria miatt elég pl. a rövidebb BC íven fekvő P pontokat tekintenünk. Így $APB \angle = APC \angle = 60^\circ$, és $BPC \angle = 120^\circ$.



Ha egy DEF háromszögben $DEF \angle = 60^\circ$, és az oldalak hossza $EF = d$, $FD = e$, $DE = f$, ahol $d \geq f$, és D -nek EF -en levő vetülete D' , akkor ismeretes, hogy a DED' derékszögű háromszögben $ED' = f/2$, $DD' = f\sqrt{3}/2$, és így a DFD' derékszögű háromszögből

$$e^2 = \frac{3f^2}{4} + \left(d - \frac{f}{2}\right)^2 = d^2 + f^2 - df.$$

Hasonlóan, ha $DEF \angle = 120^\circ$, akkor

$$e^2 = \frac{3f^2}{4} + \left(d + \frac{f}{2}\right)^2 = d^2 + f^2 + df.$$

A háromszög területe pedig mindkét esetben

$$t = \frac{df\sqrt{3}}{4}.$$

Alkalmazzuk ezeket az APB , APC , BPC háromszögre. Legyen $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$, így

$$\begin{aligned} AB^2 = a^2 &= x^2 + y^2 - xy, & AC^2 = a^2 &= x^2 + z^2 - xz, \\ BC^2 = a^2 &= y^2 + z^2 + yz, \end{aligned}$$

amiből összeadással

$$(1) \quad 3a^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz - yz).$$

Másrészt az első két háromszög területének összegéből a harmadik háromszög területét kivonva az ABC háromszög területét kapjuk:

$$\frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{xz\sqrt{3}}{4} - \frac{yz\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

amiből egyszerűsítéssel

$$xy + xz - yz = a^2.$$

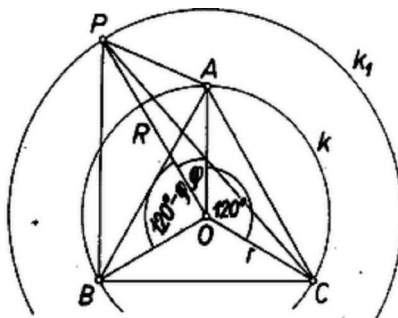
Ezt (1)-be helyettesítve átrendezés és osztás után

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2,$$

amit bizonyítani akartunk.

Hegedűs Barna (Debrecen, Tóth Á. g. III. o. t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kérdéses négyzetösszeg minden olyan esetben állandó, ha P egy az ABC háromszög köré írt k körrel koncentrikus k_1 körön fut végig. Legyen k középpontja O , sugara r és $OP = R$, állandó, továbbá jellemezzük P helyzetét az $AOP = \varphi$ szöggel. A szimmetria miatt elegendő pl. az AOB szögtér egyik felében levő P pontokat vizsgálni, tehát pl. a $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$ értékekre szorítkozni.



A POA , POB , POC háromszögből a koszinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned} PA^2 &= r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi, \\ PB^2 &= r^2 + R^2 - 2rR \cos(120^\circ - \varphi), \\ PC^2 &= r^2 + R^2 - 2rR \cos(120^\circ + \varphi). \end{aligned}$$

$\varphi = 0^\circ$ esetén a POA , $\varphi = 60^\circ$ esetén a POC háromszög elfajul, de az egyenlőség helyes marad. Összeadással és kiemeléssel

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= 3r^2 + 3R^2 - 2rS, \quad \text{ahol} \\ S &= \cos \varphi + \cos(120^\circ - \varphi) + \cos(120^\circ + \varphi). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy S értéke 0. A koszinuszfüggvény összegezési tétele szerint a 2-ik és 3-ik tagban a $\sin 120^\circ \sin \varphi$ szorzat ellentett előjellel lép fel, kiesik. Így, $\cos 120^\circ = -1/2$ figyelembevételével

$$S = \cos \varphi + 2 \cos 120^\circ \cos \varphi = \cos \varphi - \cos \varphi = 0.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk, a négyzetösszeg $3r^2 + 3R^2$ értéke valóban független φ -től, P -nek a k_1 körön elfoglalt helyzetétől.

Ha k_1 azonos k -val, akkor

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6r^2,$$

és mivel $a/r = \sqrt{3}$, azért eredményünk megegyezik az I. megoldás eredményével.

Vida György (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)