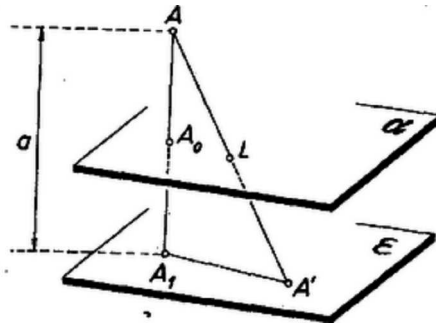


Tekintsük először az L pont mértani helyét, ha A' befutja az ε síkot. Legyen A vetülete ε -ra A_1 , és az AA_1 szakasz hossza $a (\neq 0)$. Ha A' egybeesik A_1 -gyel, akkor L az AA_1 szakasz A_0 felezőpontjában van. A' minden más helyzetében az LA_0 egyenes felezi az AA_1A' háromszög AA_1 és AA' oldalait, tehát e háromszögnek középvonala. Ezért LA_0 párhuzamos A_1A' -vel, tehát ε -nal is. Így L mindig benne van az A_0 -on átmenő, ε -nal párhuzamos α síkban. Ez a sík egyszersmind L mértani helye is, mert ha α -nak egy tetszés szerinti pontja L , akkor az AL egyenes metszi ε -t egy A' pontban, és az AA' szakasz felezőpontja L .



1. ábra

Hasonlóan M és N mértani helye az az ε -nal párhuzamos β , ill. γ sík, amely ε -nak azon az oldalán van, mint A , B és C , és ε -tól való távolsága $b/2$, ill. $c/2$, ahol b a B -nek, c a C -nek ε -tól mért távolsága.

Legyen most A', B', C' az ε sík olyan ponthármasa, hogy a képezett L, M, N pontok háromszöget alkotnak. G -t megadja az LM szakasz N_0 felezőpontját N -nel összekötő szakasznak N_0 -tól számított első harmadoló pontja, vagyis amelyre $N_0G = N_0N/3$. Feltehetjük, hogy A, B, C -nek ε -tól mért távolságaira fennáll $a \leq b \leq c$ (egyenlőség csak az egyik helyen állhat, különben az ABC sík párhuzamos lenne ε -nal). Ekkor a β sík $(b-a)/2$ -vel távolabb fekszik ε -tól, mint az α sík. A fentiekhez hasonlóan adódik, hogy N_0 rajta fekszik azon az ε -nal párhuzamos ν síkon, amely ε -nak azon az oldalán van, mint A, B, C és ε -tól mért távolsága

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right) = \frac{a+b}{4}.$$

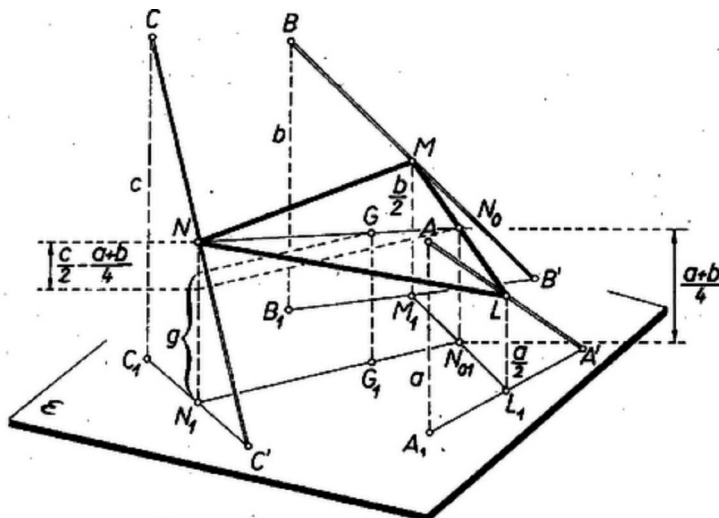
(Ezt először rögzített A' mellett kapjuk – vagyis rögzített L mellett –, majd belátjuk, hogy tetszés szerinti A' -vel ugyanerre a mértani helyre jutunk.)

Rögzített A' és B' mellett (azaz állandó L, M és N_0 mellett) hasonlóan adódik, hogy G azon az ε -nal párhuzamos σ síkon fekszik, amely ε -nak A, B, C -vel egyező oldalán van és ε -tól mért távolsága

$$\frac{a+b}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{c}{2} - \frac{a+b}{4} \right) = \frac{1}{6}(a+b+c).$$

Nyilvánvaló ugyanis, hogy G -nek ε -tól mért távolsága annyival több N_0 -nak ε -tól mért távolságánál, mint a ν és γ síkok távolságának $1/3$ része. Ugyanezt kapjuk bármely A' -vel és B' -vel.

Megmutatjuk, hogy a σ sík bármely G pontjához lehet megadni ε -ban olyan A', B', C' ponthármas, amelyekből képezett L, M, N pontok nincsenek egy egyenesen, és az LMN háromszög súlypontja éppen G . Ez az előzőkkel együtt azt jelenti, hogy G mértani helye a σ sík.



2. ábra

Legyen B, C, G vetülete ε -ra B_1, C_1, G_1 . Vegyünk ε -ban egy G_1 től különböző tetszés szerinti N_1 pontot, mérjük fel az N_1G_1 szakasz G_1 -en túli meghosszabbítására e szakasz felét, legyen a végpont N_{01} , és mérjük fel egy az N_{01} -en átmenő, $N_{01}G_1$ -től különböző tetszés szerinti egyenesre N_{01} -től mindkét irányban egy tetszés szerinti szakaszt, legyenek a végpontok L_1 és M_1 . Végül vegyük A', B', C' gyanánt A_1 -nek L_1 -re, ill. B_1 -nek M_1 -re, ill. C_1 -nek N_1 -re vett tükörképét. – Ekkor az A', B', C' -ből képezett L, M, N pontok ε -ra való vetülete nyilván L_1, M_1, N_1 , továbbá az LMN háromszög G súlypontjának ε -ra való vetülete G_1 . Ugyanis – párhuzamos vetítés mellett – az egy egyenesen levő szakaszok aránya nem változik meg, egy szakasz felező (ill. harmadoló) pontjának vetülete felezi (harmadolja) a szakasz vetületét. L_1, M_1, N_1 szerkesztésnél fogva háromszöget alkotnak, ezért N nincs benne az ε -ra L_1M_1 -en át merőlegesen álló, az L és M -et magában foglaló síkban, tehát L, M, N is háromszöget alkotnak. – Ezzel az állítás bizonyítását befejeztük.

Aleva György (Budapest, Radnóti M. gyak. g. IV. o. t.)