

I. megoldás. A jobb oldal helyére $\cos^2 x + \sin^2 x$ -et írva (1) így alakítható:

$$(2) \quad \sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x) + \cos^2 x(1 - \cos^{n-2} x) = 0.$$

Az $n = 1$ eset vizsgálatát későbbre halasztva, minden más esetben $n - 2 \geq 0$, így $\sin^{n-2} x \geq -1$, és $\cos^{n-2} x \leq 1$, ezért $1 + \sin^{n-2} x \geq 0$, és $1 - \cos^{n-2} x \geq 0$, tehát (2) bal oldalán egyik szorzat sem negatív. Így (2) csak úgy teljesülhet, ha mindkét szorzat eltűnik:

$$(3) \quad \sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x) = 0, \text{ és}$$

$$(4) \quad \cos^2 x(1 - \cos^{n-2} x) = 0$$

egyszerre fennáll. – (3) két esetben teljesül: ha

a) $\sin^2 x = 0$, azaz $x = k\pi$ (k egész szám);

b) $\sin^{n-2} x = -1$, ennek csak páratlan n mellett van valós megoldása: $\sin x = -1$, azaz

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$

Az a) esetben $\cos x = \pm 1$, így (4) csak úgy teljesülhet, ha második tényezője 0. Páros n -re $\cos^{n-2} x = 1$, ezért a második tényező mindig 0, páratlan n -re viszont csak akkor 0 a második tényező, ha $\cos x = +1$, azaz $x = 2k\pi$ esetén.

A b) esetben $\cos x = 0$, tehát (4) teljesül.

Végül $n = 1$ mellett (1) osztással így írható:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

amiből

$$\frac{\pi}{4} + x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ azaz } x = \begin{cases} 2k\pi \\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi. \end{cases}$$

Más úton ugyanarra az eredményre jutottunk, mint fentebb az 1-nél nagyobb páratlan n kitevőkre. Ezek szerint a megoldás:

$$\text{ha } n = 2j \text{ (} j > 0, \text{ egész) :} \quad x = k\pi \text{ (} k \text{ egész);}$$

$$\text{ha } n = 2j - 1 \text{ (egész) :} \quad x = \begin{cases} 2k\pi, \\ \left(\frac{3}{2} + 2k \right) \pi. \end{cases}$$

Gillemot László (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Páros n esetén $\cos^n x$ és $\sin^n x$ 0 és 1 közti számok – a két határt is megengedve –, ennél fogva különbségük legnagyobb értéke úgy adódik, ha $\cos^n x$ legnagyobb és $\sin^n x$ legkisebb értékét vesszük:

$$\cos^n x - \sin^n x \leq 1.$$

Az adott egyenlet éppen e legnagyobb érték felvételét írja elő, tehát

$$\cos^n x = 1, \quad \sin^n x = 0, \text{ amiből } \cos x = \pm 1, \quad x = k\pi.$$

Páratlan n mellett is megoldást ad $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$, egyébként $\sin^n x = \cos^n x - 1 < 0$, így $\sin x < 0$, tehát (egyelőre a $(0, 2\pi)$ intervallumra szorítkozva)

$$\pi < x < 2\pi.$$

Vezessük be új ismeretlennek $y = 2\pi - x$ -et. Ekkor $\cos x = \cos y$, $\sin x = -\sin y$, és $\pi > y > 0$, tehát $\sin y > 0$, és (1) így alakul

$$(5) \quad \cos^n y + \sin^n y = 1.$$

Innen

$$\cos^n y = 1 - \sin^n y \geq 0,$$

tehát $\cos y \geq 0$, ezért csak a $\pi/2 \geq y > 0$ szögekről lehet szó. Nyilvánvaló, hogy $y = \pi/2$ megoldás, és így (1)-nek $x = 3\pi/2$ is megoldása.

Megmutatjuk, hogy a $0 < y < \pi/2$ értékekre (5) nem teljesülhet, tehát további megoldás nincs. Valóban, $n = 1$ esetén $\cos y$ és $\sin y$ a derékszögű koordináta-rendszerben az origó körüli egységkör y irányszögű P pontjának koordinátái, és így az OPP' derékszögű háromszögben (P' a P vetülete az X -tengelyre) a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$OP' + P'P > OP, \text{ azaz } \cos y + \sin y > 1.$$

$n \geq 3$ esetén viszont $\cos^n y < \cos^2 y$, $\sin^n y < \sin^2 y$, és így $\cos^n y + \sin^n y < \cos^2 y + \sin^2 y = 1$.

Eredményeink mindenben egyeznek az I. megoldás végén levő összeállítással.

Kláb János (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)