

Tegyük fel, hogy a, b, c nem mind egyenlők. Ekkor van köztük

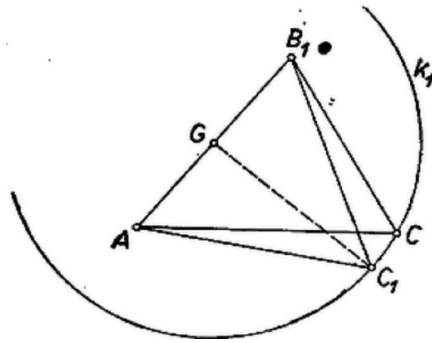
$$d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

-nál nagyobb is, kisebb is, legyen ez a , ill. c . A csúcsokat a szokás szerint jelölve tükrözzük a háromszöget az $AC = b$ oldal F felezőpontjára. A nyert $ABCB'$ paralelogrammában az oldalak négyzetösszege ismert tétel szerint¹ egyenlő az átlók négyzetösszegével:

$$(4) \quad 2(a^2 + c^2) = b^2 + 4s^2,$$

ahol $s = BF$, a háromszög AC oldalához tartozó súlyvonal. Ez azt jelenti, hogy ha A -t és C -t rögzítjük, akkor B mértani helye egy az F középpont körüli k kör, mert így b , vele $a^2 + c^2$, és (4) szerint s is állandó.

Távolítsuk B -t A -tól a k -n addig a B_1 helyzetig, amelyre $AB_1 = d$. Ilyen helyzet van, mert a távolság folytonosan növekszik, és van k -n az A -tól d -nél távolabbi pont, ilyen B -nek az AC felező merőlegesére való B'' tükörképe, amelyre $AB'' = CB = a > d$. Ebből azt is látjuk, hogy B_1 a BB'' íven van, tehát az ACB_1 háromszög területe nagyobb ABC területénél, mert az előbbiben a közös AC alaphoz tartozó magasság nagyobb.



3. ábra

Most már az $AB_1 = c = d$ oldalt rögzítve C mértani helye egy az AB_1 -nek G felezőpontja körüli k_1 kör, és a terület nyilván arra a C_1 -re maximális, amelyre $C_1G \perp AB_1$, vagyis $a = b$, és így a háromszög szabályos, mert

$$a^2 = b^2 = \frac{3d^2 - c^2}{2} = c^2.$$

Ekkor a terület $S = a^2\sqrt{3}/4$, és $4\sqrt{3}S = 3a^2 = a^2 + b^2 + c^2$, tehát (1)-ben egyenlőség áll. Minden más esetben S -sel együtt (1) jobb oldala kisebb. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Kóta Józsefnek az Olimpián írt dolgozatából.

Megjegyzések. I. Az állítást annak az ismert eredménynek² a felhasználásával is bizonyíthatjuk, hogy ugyanakkora kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb. Nyilvánvalóan elegendő ugyanis azokat a háromszögeket vizsgálnunk, amelyekben $a + b + c = 2s$, állandó. Szabályos háromszög esetében $a = b = c = 2s/3 = a'$, ekkor (1) két oldala egyenlő, közös értékük $4s^2/3$. Megmutatjuk, hogy minden más esetben (1) bal oldala nagyobb ennél. Legyen az első két oldal értéke $a = a' + x$, $b = a' + y$, ahol x és y közül legalább az egyik 0-tól különböző. Így a harmadik oldal: $c = 2s - 2a' - x - y = a' - (x + y)$, és a négyzetösszeg:

$$(a' + x)^2 + (a' + y)^2 + [a' - (x + y)]^2 = 3a'^2 + x^2 + y^2 + (x + y)^2 > 3a'^2 = \frac{4s^2}{3}.$$

A jobb oldal viszont a hivatkozott eredmény szerint kisebb, tehát minden más esetben (1)-ben valóban a $>$ jel érvényes.

Romhányi Gábor (Esztergom, Temesvári P. g. IV. o. t.)

2. Az állításnak az $a_1, a_2, \dots, a_n$ oldalakkal bíró S_n területű n -szögre ($n > 3$) való

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 4S_n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

általánosítása az I. megjegyzés gondolatmenetéhez hasonlóan bizonyítható.

Sonnevend György (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

¹ Lásd pl. 1006. feladat, K. M. L. 21 (1960/9) 20. o.

² Lásd n -szögre ($n \geq 3$) Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása (Tankönyvkiadó, Budapest, 1959) 48. o.