Vonjuk ki az első egyenlet négyzetéből a második egyenletet; így az ismeretlenek négyzetei kiesnek:

$$2\big[xy+(x+y)z\big]=a^2-b^2.$$

xy és $x+y$ az (1), ill. (3) alapján z-vel kifejezhető, és így z-re egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$2\big[z^2+(a-z)z\big]=a^2-b^2,$$

amiből

$$z=\frac{a^2-b^2}{2a}, \tag{4}$$

feltéve természetesen, hogy $a\neq 0$.

Most már ismerjük x és y szorzatát és összegét:

$$xy=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2, \qquad x+y=a-z=\frac{a^2+b^2}{2a}, \tag{5}$$

így x és y a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2-\frac{a^2+b^2}{2a}u+\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=0.$$

A diszkrimináns így alakítható:

$$D=\frac{1}{4a^2}\big[(a^2+b^2)-(2a^2-2b^2)^2\big]=\frac{1}{4a^2}(3a^2-b^2)(3b^2-a^2),$$

tehát

$$u_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}.$$

Eszerint az egyenletrendszernek két megoldása van, ezekben z értéke közös, x és y pedig felcserélve egyenlők:

$$\begin{aligned} x_1&=u_1, &\qquad y_1&=u_2, &\qquad z_1&=\frac{a^2-b^2}{2a},\\ x_2&=u_2, & y_2&=u_1, & z_2&=z_1. \end{aligned}$$

Az x, y, z számok pozitívságához (1) szerint szükséges:

$$a>0.$$

Így z valóban pozitív, ha

$$a^2-b^2>0, \quad \text{azaz} \quad a>|b|. \tag{6}$$

Ezekkel az (5) alatti mindkét kifejezés pozitív, ezért x, y akkor és csak akkor pozitívok, és egyszersmind különbözők is, ha D pozitív. Ha pedig x, y különbözők, akkor (3) szerint z egyikükkel sem egyenlő. (6) miatt D első kéttagúja pozitív, így a másodiknak is pozitívnak kell lennie:

$$3b^2>a^2.$$

A keresett feltételek a következőkben foglalhatók össze:

$$a>0, \quad b^2<a^2<3b^2.$$

Nagy Géza (Debrecen, Református g. IV. o. t.)