

I. megoldás. A p -t tartalmazó tagokat különválasztva (1) bal oldala szorzattá alakítható:

$$(x^2 - 1) + p(x + 1) = (x + 1)(x - 1 + p).$$

Eszerint a gyökök: $x_1 = -1$, $x_2 = 1 - p$. Az x_1 behelyettesítésével (2) így alakítható át:

$$(3) \quad x_2^2(1 + x_2) = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha vagy

$$\begin{aligned} x_2 = 0, \quad \text{azaz} \quad 1 - p = 0 \text{-ből} \quad p = 1, \quad \text{vagy} \\ 1 + x_2 = 0, \quad \text{azaz} \quad 2 - p = 0, \quad p = 2. \end{aligned}$$

Kunszenti Tamás (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)

II. megoldás. A gyökök felírása nélkül is célhoz érünk a gyökök és az együtthatók közötti összefüggések felhasználásával. (2)-t 0-ra redukálva

$$(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^3 + x_2^3) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 0.$$

Ide az (1)-ből adódó $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = p - 1$ kifejezéseket behelyettesítve egyenletet kapunk p -re:

$$(4) \quad p^2 - 2(p - 1) - p^3 + 3p(p - 1) = -p^3 + 4p^2 - 5p + 2 = 0.$$

Észrevéve, hogy az együtthatók összege 0, látjuk, hogy (4) egyik gyöke $p = 1$, tehát a bal oldalon $p - 1$ kiemelhető:

$$(5) \quad (p - 1)(-p^2 + 3p - 2) = 0.$$

És mivel a második zárójelben levő polinom 0-helyei 1 és 2, azért egyenletünk

$$-(p - 1)^2(p - 2) = 0,$$

ami $p = 1$ és $p = 2$ -re teljesül.

Verdes Miklós (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. (3)-ból látható, hogy a meghatározott p értékekkel – és csak ezekkel – minden pozitív egész n -re teljesül az általánosabb

$$x_1^n + x_1^{n+1} = -(x_2^n + x_2^{n+1})$$

követelmény.

Surányi Andor (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)

2. (4)-ből (5)-öt a $p^2 - p^3 = -p^2(p - 1)$ kiemeléssel is megkaphatjuk.