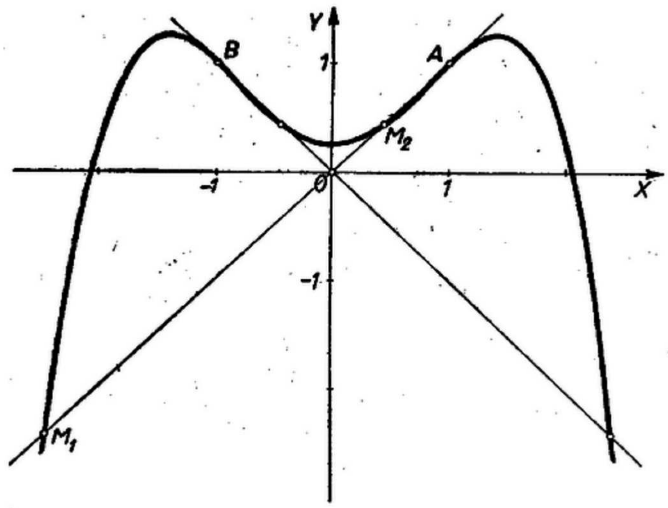
Megoldás. I. A keresett állandó pontokon a görbének az egyszerű számítást biztosító $c = 0$ és $c = 1$ értékek mellett is át kell mennie. Az így adódó

(1) $$y = x^2, \qquad y = x^4 + x^2 - 1$$

egyenletrendszerből y kiküszöbölésével

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Innen – tekintve, hogy minden valós x-re $x^2 + 1 \geqq 1 > 0$ – adódik $x^2 - 1 = 0$, vagyis $x = \pm 1$, tehát (1)-ből mindkét esetre $y = 1$. Eszerint az állandó pontok csak $A(1,1)$ és $B(-1,1)$ lehetnek. Valóban az adott függvény értéke az $x = \pm 1$ helyeken független c értékétől: $y = c + 1 - c = 1$, tehát az ábrázoló görbék minden c mellett átmennek A-n és B-n.



II. Az $y = x^2$ parabola esetében az olyan egyeneseket tekintettük érintőknek, amelyeknek a parabolával való két közös pontjuk egybeesik, másképpen, amelyek egyenletét a paraboláéval összekapcsolva és az egyenletrendszerből y-t kiküszöbölve az x-re kapott másodfokú egyenletnek két egyenlő gyöke van. Így az egyenlet két gyöktényezője egyenlő.

Esetünkben az OA egyenes egyenlete $y = x$, így az $y = x$, $y = cx^4 + x^2 - c$ egyenletrendszerből adódó

$$cx^4 + x^2 - x - c = 0$$

egyenletnek az $x = 1$ szám a fentiek szerint gyöke, tehát $x - 1$ a bal oldalnak tényezője. Valóban

$$c(x^4 - 1) + (x^2 - x) = c(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) + x(x - 1) =$$
$$= (x - 1)\big[c(x + 1)(x^2 + 1) + x\big] = (x - 1)\big[cx^3 + cx^2 + (c + 1)x + c\big].$$

A további közös pontok abszcisszáit a

(2) $$cx^3 + cx^2 + (c + 1)x + c = 0$$

egyenletből kapjuk. Az előírt A-beli érintés a parabola mintájára csak akkor következik be, ha az $x = 1$-szám gyöke (2)-nek. Kell tehát, hogy

$$c + c + (c + 1) + c = 4c + 1 = 0$$

teljesüljön, vagyis $c = -1/4$. Ekkor (2) így alakul:

$$-1/4(x^3 + x^2 - 3x + 1) = 0,$$

és a zárójelből az $x - 1$ gyöktényező valóban kiemelhető:

$$(x^3 - 1) + (x^2 - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1 + x + 1 - 3) =$$
$$= (x - 1)(x^2 + 2x - 1).$$

Most már az $x^2 + 2x - 1 = 0$ egyenletből a további két metszéspont abszcisszája $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Eszerint a metszéspontok:

$$M_1(-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}), \qquad M_2(-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

Máté Eörs (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A görbék közös pontjait a következő meggondolásból is megkaphatjuk. A függvény kifejezésének c szerint rendezett

$$y = c(x^4 - 1) + x^2$$

alakjából látjuk, hogy y csak azokra az x-ekre független c-től, amelyekre $x^4 - 1 = 0$.