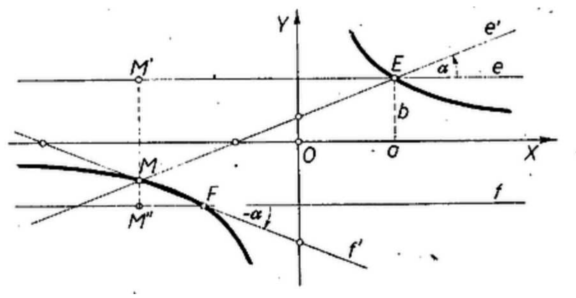
Ha az EF egyenes merőleges e és f-re, akkor az EFM háromszög egyenlő szárú, mert így az EM és FM félegyenesek az EF, ill. FE félegyenesből is egyenlő nagyságú és ellentétes irányú forgatással jönnek létre. Kivétel az $\alpha = \pm 90^\circ$ eset, mert ekkor e és f egybeesnek, M határozatlan. Nyilvánvaló, hogy ilyenkor a mértani hely az EF szakasz felező merőlegese a felezőpont kivételével.



Ha EF nem merőleges e és f-re, akkor vegyük a szakasz felezőpontját derékszögű koordinátarendszerünk origójának, és legyen az X-tengely párhuzamos e és f-fel. Így E koordinátáit $(a,\ b)$-vel jelölve $F(-a,\ -b)$. Ha még $\operatorname{tg}\alpha = m$, akkor $\operatorname{tg}(-\alpha) = -m$, tehát e', ill. f' egyenlete:

$$y - b = m(x-a), \qquad y + b = -m(x+a).$$

Így az M metszéspont koordinátái:

$$\overline{x} = -\frac{b}{m}, \qquad \overline{y} = -ma.$$

($m \neq 0$, hiszen $\alpha = 0^\circ$ és 180° esetére nincs metszéspont; számításunk $\alpha = \pm 90^\circ$ esetére sem érvényes, de tudjuk, hogy ekkor sincs metszéspont, mert $e' \parallel f'$.) m kiküszöbölésével

$$m = -\frac{b}{\overline{x}} = -\frac{\overline{y}}{a}, \qquad \text{azaz} \qquad \overline{xy} = ab.$$

Itt feltevésünknél fogva $a \neq 0$; másrészt nyilván $b \neq 0$, mert e és f esnek egybe. Eszerint minden M pont rajta van az $xy = ab$ egyenletű egyenlő oldalú hiperbolán, melynek aszimptotái a koordinátatengelyek, és amely átmegy E-n. Látjuk ugyanis, hogy E és F koordinátái is kielégítik az egyenletet (még egyszerűbb azonban, hogy ha $e' \equiv EF$, akkor $M \equiv F$, ha pedig $f' \equiv EF$, akkor $M \equiv E$).

Megmutatjuk, hogy e hiperbola minden M pontjára ME és MF egyenlő abszolút értékű, de ellentétes forgási irányú β ill. γ szöget zár be e-vel, ill. f-fel. Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy $\operatorname{tg}\beta$ és $\operatorname{tg}\gamma$ összege 0. Valóban $\overline{y} = ab/\overline{x}$-sal

$$\frac{\overline{y}-b}{\overline{x}-a} + \frac{\overline{y}+b}{\overline{x}+a} = \frac{\dfrac{ab}{\overline{x}} - b}{\overline{x}-a} + \frac{\dfrac{ab}{\overline{x}} + b}{\overline{x}+a} = \frac{b(a-\overline{x})}{\overline{x}(\overline{x}-a)} + \frac{b(a+\overline{x})}{\overline{x}(\overline{x}+a)} =$$
$$= -\frac{b}{\overline{x}} + \frac{b}{\overline{x}} = 0.$$

Eszerint a keresett mértani helyet a hiperbola összes pontjai adják.

Kiss Tünde (Tamási, Béri Balogh Á. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A hiperbola egyenletét e' és f' egyenletének felírása nélkül abból is megkaphatjuk, hogy ha M' és M'' az M vetülete e-n, ill. f-en, akkor az MEM' és MFM'' hasonló derékszögű háromszögek, befogóik aránya egyenlő. Így azonban több eset szétválasztására van szükség aszerint, hogy M az e és f által szétvágott sík melyik félsíkján, ill. a síksávban van. Csak az előjelek vizsgálatával biztosíthatjuk, hogy a koordinátákból helyesen írjuk fel az említett befogók abszolút értékét, másrészt, hogy az $M'EM$ és MFM'' forgások ellentétes irányúak legyenek. Ha pedig ezt elmulasztjuk, akkor a mértani helynek csupán az I. síknegyedbeli részét kapjuk (ha ti. $a > 0$ és $b > 0$).

Ugyanezek a kérdések azoknak a derékszögű háromszögeknek a felhasználásával is fellépnek, amelyeket az e és f-nek a tengelyeken levő metszéspontjaival és M-mel meghatározott egyenlő szárú háromszögekből a magasság meghúzásával kapunk. Az ilyen „második megoldások” többnyire hiányosak.

2. Néhány további, részben elemi megoldás abból vélte kikövetkeztetni, hogy hiperbolával állunk szemben, hogy M és E, ill. M és F egyenlő távol vannak e' ill. f'-nek a tengelyeken levő metszéspontjaitól. Ez az aszimptótás–tulajdonság minden hiperbolánál fennáll, megvizsgálandó volna azonban, hogy nincs-e más olyan görbe is, amelynek szelőin bizonyos egyenesekre vonatkozóan hasonló egyenlőség áll fenn. Más szóval, hogy ez a tulajdonság a hiperbolának *meghatározó tulajdonsága-e.*