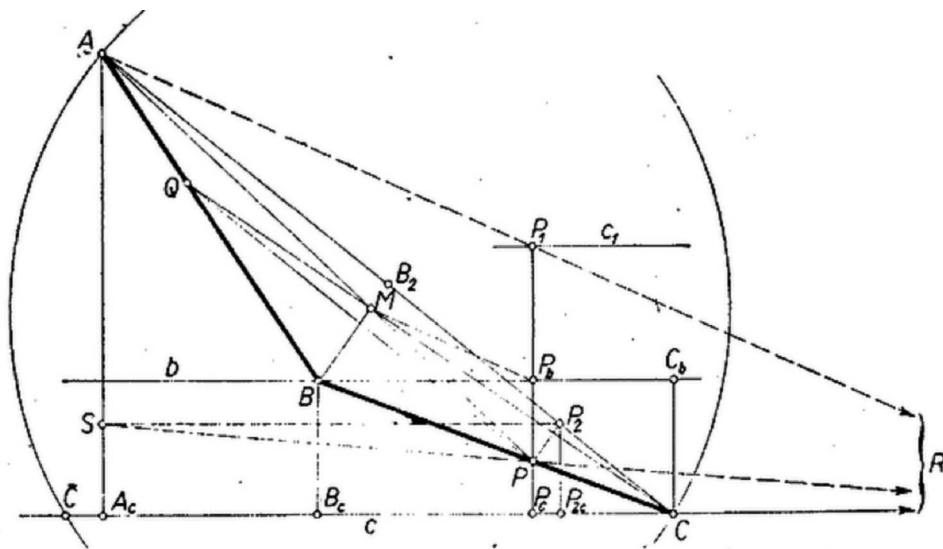


I. megoldás. A követelményeknek megfelelő útvonal esetén az ABC háromszög egyenlő szárú. Messe AB -t a P -n átmenő, AC -vel párhuzamos egyenes Q -ban, legyen az $ACPQ$ trapéz átlóinak metszéspontja M , továbbá P és C vetülete b -n P_b , ill. C_b . Ekkor az MPQ , MAC , a BPQ , BCA és a PBP_b , CBC_b nyilvánvalóan hasonló háromszögpárokból

$$\frac{MP}{MA} = \frac{PQ}{CA} = \frac{PB}{CB} = \frac{PP_b}{CC_b}.$$



Itt az utolsó arány ismert (mert CC_b a b és c egyenesek távolsága), ezért M a PA szakaszon megszerkeszthető¹ (pl. a PAP_1 háromszög felhasználásával, ahol P_1 a P vetülete c -nek b -re vett c_1 tükörképén, így $P_bP_1 = CC_b$ –, M -et a P_b -n átmenő AP_1 -gyel párhuzamos egyenes metszi ki PA -ból). M ismeretében C -t c -ből az M körül írt MA sugarú körrel metszhetjük ki – mivel ABC háromszög egyenlő szárú, s így az $ACPQ$ trapéz szimmetrikus, tehát $MA = MC$ –, B -t pedig a CP egyenes b -vel való metszéspontja adja.

Megmutatjuk, hogy az ABC útvonal valóban megfelel a feltételnek. A CB szakaszon szerkesztés szerint rajta van P . Jelöljük az AC -vel P -n áthúzott párhuzamos és AB metszéspontját Q^* -gal. Ekkor az $ACPQ^*$ trapéz átlóinak metszéspontja pl. az AP átlót – amint fentebb láttuk – PP_b/CC_b arányban osztja, tehát egybeesik az M ponttal. Mivel szerkesztés szerint AMC egyenlő szárú háromszög, így PMQ^* is, amiből következik, hogy $ACPQ^*$ szimmetrikus trapéz, s így a szárak meghosszabbításának a metszéspontja is – ami a B pont – a szimmetriatengelyre esik. Ez azt jelenti, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú: $AB = BC$.

M egyértelműen szerkeszthető és mindig létezik. C -re 2, 1, vagy 0 megoldást kapunk. C -ből B szerkesztése ismét egyértelmű és B mindig létezik, mert a feladat szerint $PP_b < CC_b$.

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Legyen (az eddigi jelöléseket megtartva) B és P vetülete c -re B_c , ill. P_c , AC -re B_2 , ill. P_2 , végül A és P_2 vetülete c -re A_c , ill. P_{2c} . Így P_2 az AP átmérőjű Thalész-körön van. Másrészt

$$\frac{P_2P_{2c}}{AA_c} = \frac{P_2C}{AC} = \frac{P_2C}{2B_2C} = \frac{PC}{2BC} = \frac{PP_c}{2BB_c} = \frac{PP_c}{P_1P_c},$$

eszerint megszerkeszthetjük P_2 -nek c -től való távolságát, és ebből még egy mértani helyet kapunk P_2 számára. Így P_2 , majd belőle C megszerkeszthető. (A fenti P_1A egyenesnek c -vel való metszéspontját R -rel jelölve PR -nek AA_c -n levő S metszéspontjára $SA_c = P_2P_{2c}$.)

A szerkesztés helyességének bizonyítását mellőzve csupán azt említjük, hogy a megoldások száma innen is 2, 1 vagy 0.

Máté Eörs (Szeged, Radnóti M. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldók többsége B -t a P és A alappontokhoz és a $PP_b : CC_b$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körrel metszette ki b -ből.

Ugyanis a fenti jelölésekkel

$$BP : BA = BP : BC = PP_b : CC_b.$$

5 dolgozat pedig bonyolult számítások alapján adott szerkesztést.

¹ Ehhez még az ABC háromszög egyenlő szárú voltát sem használtuk fel.