

I. A 637. gyakorlat megoldása¹ során bebizonyítottuk; hogy

a) hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének szögei rendre egyenlők az eredeti háromszög szögei pótszögének a 2-szeresével, valamint hogy

b) tompaszögű háromszög talpponti háromszögének két szöge 2-szer akkora, mint az eredeti háromszög megfelelő hegyesszöge, a harmadik pedig 180° -kal kisebb a tompaszög 2-szeresénél.

Láttuk továbbá, hogy derékszögű háromszögben a magasságtalppontok nem alkotnak háromszöget.

Feltéve, hogy a keresett H háromszög-alak hegyesszögű, betűzzük a szögeket úgy, hogy álljon $90^\circ > \alpha \geq \beta \geq \gamma$. Ekkor a T talpponti háromszögnek a) alapján kifejezhető α' , β' , γ' szögeire:

$$\alpha' = 180^\circ - 2\alpha \leq \beta' = 180^\circ - 2\beta \leq \gamma' = 180^\circ - 2\gamma.$$

H és T hasonlósága nyilván csak úgy állhat fenn, ha a szögek nagyság szerinti rendben egyeznek meg. Ebből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\alpha = 180^\circ - 2\gamma, \quad \beta = 180^\circ - 2\beta, \quad \gamma = 180^\circ - 2\alpha.$$

Innen $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, vagyis H valóban hegyesszögű, és a 637. gyakorlatban látott alaktól különböző.

Tegyük fel másodszor, hogy H tompaszögű, és benne

$$(1) \quad \alpha > 90^\circ > \beta \geq \gamma.$$

Így b) szerint T szögei:

$$(2) \quad \alpha' = 2\alpha - 180^\circ, \quad \beta' = 2\beta, \quad \gamma' = 2\gamma.$$

Itt $\gamma' \leq \beta'$; másrészt hasonlóság esetén γ' nem lehet T legkisebb szöge, mert $\gamma' = \gamma$ -ból $\gamma = 0^\circ$ -ra jutnánk. Eszerint T legkisebb szöge α' , vagyis

$$\alpha' < \gamma' < \beta'$$

(egyenlőség γ' és β' között sem állhat, mert β' , mint a legnagyobb szög, tompaszög), tehát

$$\alpha' = 2\alpha - 180^\circ = \gamma, \quad \gamma' = 2\gamma = \beta, \quad \beta' = 2\beta = \alpha.$$

Innen $\alpha = 2\beta = 4\gamma$, másképpen $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 2 : 1$, vagyis ez esetben H a 637. gyakorlatban vizsgált alak.

Más lehetőség a hasonlóságra nincs, ezzel az állítást bebizonyítottuk.

II. Keressünk olyan tompaszögű H -t, amelyre T_1 ugyancsak tompaszögű, nem hasonló H -hoz, és $T_2 \sim H$. Így H és T_1 szögeit ismét (1) és (2) adják, és γ' nem lehet tompaszög. Feltéve, hogy T_1 szögei közül α' a tompaszög, b) szerint T_2 szögei:

$$\alpha'' = 2\alpha' - 180^\circ = 4\alpha - 540^\circ, \quad \beta'' = 2\beta' = 4\beta, \quad \gamma'' = 2\gamma' = 4\gamma.$$

Itt a fenti második esethez hasonló megfontolással $\gamma'' \leq \beta''$, és γ'' nem a legkisebb szöge T_2 -nek, ezért a legkisebb szög α'' . Az előírt hasonlóság miatt

$$\begin{array}{lll} \alpha'' = \gamma, & \gamma'' = \beta & \beta'' = \alpha, \quad \text{azaz} \\ 4\alpha - 540^\circ = \gamma, & 4\gamma = \beta, & 4\beta = \alpha, \end{array}$$

tehát $\alpha : \beta : \gamma = 16 : 4 : 1$. Másképpen,

$$\frac{180^\circ}{16 + 4 + 1} = \frac{180^\circ}{21} = \varepsilon \quad \text{jelöléssel} \quad \alpha = 16\varepsilon, \quad \beta = 4\varepsilon, \quad \gamma = \varepsilon.$$

Így valóban $\alpha > \beta + \gamma$, ezért T_1 szögei: $\alpha' = 2\alpha - 180^\circ = 32\varepsilon - 21\varepsilon = 11\varepsilon$, $\beta' = 2\beta = 8\varepsilon$, $\gamma' = 2\gamma = 2\varepsilon$, ezekre ismét $\alpha' > \beta' + \gamma'$, tehát $\alpha'' = 2\alpha' - 180^\circ = 22\varepsilon - 21\varepsilon = \varepsilon = \gamma$, $\beta'' = 2\beta' = 16\varepsilon = \alpha$ és $\gamma'' = 2\gamma' = 4\varepsilon = \beta$.

H és T_2 hasonlóságából következik, hogy talpponti háromszögeik: T_1 , ill. T_3 ugyancsak hasonló, tehát a T_1 alak (a szögek aránya $2 : 8 : 11$) ugyancsak megfelel a követelménynek. Ezzel az előírást teljesítettük.

Bornes Klára (Budapest, Teleki Blanka Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzés. A II. rész követelményének megfelelő összes alakok (szögarányok) a következők:

	$1 : 2 : 2;$	$3 : 1 : 1;$
$H, T_2, T_4, \dots$ hegyesszögű, $T_1, T_3, T_5, \dots$ tompaszögű:	$2 : 5 : 6;$	$9 : 3 : 1;$
	$2 : 6 : 7;$	$11 : 3 : 1;$
$H, T_2, T_4, \dots$ tompaszögű, $T_1, T_3, T_5, \dots$ tompaszögű:	$1 : 4 : 10;$	$2 : 8 : 5;$
	$1 : 4 : 16;$	$2 : 8 : 11.$

¹K. M. L. 22 (1961/3) 110. o.