

a) Jelentse β az (1) egyenlet egy gyökét, vagyis álljon fenn

$$(3) \quad g(\beta) = \beta^4 + 3\beta^3 + 4\beta^2 + 2\beta + 1 = 0.$$

Eszerint a $-\beta$ számra teljesül

$$(-\beta)^4 - 3(-\beta)^3 + 4(-\beta)^2 - 2(-\beta) + 1 = 0,$$

vagyis $-\beta$ gyöke az

$$(4) \quad x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

ugyancsak negyedfokú egyenletnek, melyben a páratlan fokszámú tagok együtthatói az (1) megfelelő együtthatóinak (-1) -szeresei, a többi együtthatók pedig egyenlők (1) megfelelő együtthatóival. β az (1)-nek bármelyik gyökét jelentheti, ezért (4)-et az (1) mindegyik gyökének (-1) -szerese kielégíti. Más szám nem is tesz eleget (4)-nek, hiszen ha ennek egy gyöke γ , akkor $-\gamma$ gyöke a (4)-ből az iménti módosítással képezett egyenletnek, vagyis (1)-nek. Ezek szerint (4) éppen a keresett első egyenlet.

Ha (3) teljesül, akkor $\beta \neq 0$, hiszen $g(0) = 1 \neq 0$. Így mindegyik β gyök reciprokára fennáll

$$\frac{g(\beta)}{\beta^4} = 1 + 3\frac{1}{\beta} + 4\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\beta}\right)^3 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^4 = 0,$$

tehát mindegyik gyök reciproka kielégíti a

$$(5) \quad g^*(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

egyenletet, melynek együtthatói fordított sorrendben egyeznek (1) együtthatóival (a sorrend természetesen x fogyó hatványainak rendjében értendő). (5) valóban a keresett második egyenlet, mert gyökei csak az előírt számok, hiszen ha (5)-nek egy gyöke γ , akkor ugyanez a megfontolás mutatja, hogy $1/\gamma$ kielégíti (1)-et.

Mármost első megfontolásunkat (5)-re alkalmazva nyerjük, hogy a harmadik egyenlet:

$$(6) \quad \bar{g}^*(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0.$$

b) Képezzük elsőnek a $g(x) \cdot \bar{g}(x) = G_1(x)$ szorzatot. $\bar{g}(x)$ egymás utáni tagjaival $g(x)$ -et végigszorozva a részletszorzatok ugyancsak x fogyó hatványai szerint rendezett polinomok lesznek, és legmagasabb fokú tagjuk fokszáma lépésről lépésre 1-gyel kisebb lesz. Ezt tudva célszerű lesz a részletszorzatokat – a közöséges számok szorzásánál szokásos írásmódhoz hasonlóan – lépcsőzetesen úgy rendezni, hogy x ugyanazon kitevős hatványai egy-egy oszlopba jussanak. Így x hatványát minden oszlopban elég egyszer kiírni (pl. csak a felső tagban).

$$G_1(x) = \frac{\begin{array}{cccccccc} (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1) & (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1) & & & & & & \\ x^8 + 3x^7 + 4x^6 + 2x^5 + x^4 & & & & & & & \\ -3 & -9 & -12 & -6 & -3x^3 & & & \\ & +4 & +12 & +16 & +8 & +4x^2 & & \\ & & -2 & -6 & -8 & -4 & -2x & \\ & & & & +1 & +3 & +4 & +2 & +1 \end{array}}{x^8 \quad -x^6 \quad +6x^4 \quad +4x^2 \quad +1}.$$

A páratlan kitevős hatványok kiesése várható volt. Hiszen (1) gyökeit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ -gyel jelölve (4) gyökei $-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3, -\beta_4$, így gyöktényezőző alakban

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) \cdot \bar{g}(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3)(x - \beta_4) \cdot \\ &\quad \cdot (x + \beta_1)(x + \beta_2)(x + \beta_3)(x + \beta_4) = \\ &= (x^2 - \beta_1^2)(x^2 - \beta_2^2)(x^2 - \beta_3^2)(x^2 - \beta_4^2), \end{aligned}$$

és ezt polinom má kifejtve x -nek csak páros kitevős hatványai léphetnek fel.

A fentebbiek alapján nyilvánvaló, hogy a $g^*(x) \cdot \bar{g}^*(x) = G_2(x)$ szorzatot $G_1(x)$ -ből is megkaphatjuk, az együtthatókat fordított sorrendben véve, tehát

$$G_2(x) = x^8 + 4x^6 + 6x^4 - x^2 + 1.$$

Ezekből (1) és a képezett három egyenlet bal oldalainak szorzata:

$$G_1(x) \cdot G_2(x) = x^{16} + 3x^{14} + 8x^{12} + 21x^{10} + 55x^8 + 21x^6 + 8x^4 + 3x^2 + 1,$$

és ez, amint várható volt, x^2 -re nézve szimmetrikus polinom, hiszen minden gyökének (-1) -szerese, reciproka és reciprokának (-1) -szerese ugyancsak gyök, akárcsak (2) -ben (és minden gyök ugyanannyiszoros gyök), amint azt az 1113. feladatban láttuk.

Ezért – ha az állítás igaz – a meghatározandó további két egész együtthatós polinom szorzata ugyancsak x^2 -re nézve szimmetrikus polinom lesz, fokszáma $20 - 16 = 4$, két szélső együtthatója 1, tehát

$$H(x) = x^4 + Ax^2 + 1$$

alakú. Az A együttható meghatározása végett képezzük $G_1(x) \cdot G_2(x)$ és $H(x)$ szorzatát és kérdezzük, van-e olyan A , amelyre

$$G_1(x) \cdot G_2(x) \cdot H(x) \equiv f(x).$$

A szorzat a szimmetrikus tagoknak egy-egy zárójelbe való foglalásával

$$(x^{20} + 1) + (3 + A)(x^{18} + x^2) + (9 + 3A)(x^{16} + x^4) + (24 + 8A)(x^{14} + x^6) + (63 + 21A)(x^{12} + x^8) + (42 + 55A)x^{10}.$$

Az azonosság akkor és csak akkor áll fenn, ha valamennyi megfelelő együttható egyenlő:

$$3 + A = 9 + 3A = 24 + 8A = 63 + 21A = 0 \quad \text{és} \quad 42 + 55A = -123.$$

Valamennyi feltételből $A = -3$ adódik, tehát

$$H(x) = x^4 - 3x^2 + 1.$$

Mármost

$$(7) \quad \begin{aligned} H(x) &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 - 1)^2 - x^2 = \\ &= (x^2 - 1 - x)(x^2 - 1 + x), \end{aligned}$$

tehát valóban írható két egész együtthatós polinom szorzata gyanánt. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Zalay Miklós (Budapest, XVIII., Hengersor úti Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Többen $H(x)$ -nek két tényezőre bontása céljára megoldották a $H(x) = 0$ egyenletet:

$$(x^2)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

és az irracionális gyökök láttán kimondták, hogy a kívánt felbontás lehetetlen, a feladat állítása téves.

Megmutatjuk, hogy kissé hosszabb úton ebből a kiindulásból is el lehet jutni a (7) eredményhez. Észrevéve, hogy

$$(x^2)_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2, \quad \text{és hasonlóan}$$

$$(x^2)_2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^2,$$

$H(x)$ gyökei a következők:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad x_4 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Ha a feladat állítása igaz, és a kérdéses két polinom másodfokú, akkor létezik ezeknek olyan két párba állítása, amelyben az összegek is és a szorzatok is egész számok. Ilyen az x_1, x_4 , és x_2, x_3 párosítás:

$$x_1 + x_4 = -1, \quad x_1 x_4 = -1; \quad x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 x_3 = -1.$$

Ezekkel

$$(x - x_1)(x - x_4) = x^2 + x - 1 \quad \text{és} \quad (x - x_2)(x - x_3) = x^2 - x - 1,$$

és így valóban

$$H(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1).$$

2. Azt, hogy $G_1(x)$ nem tartalmazhatja x páratlan kitevős hatványát, a tényezők

$$g(x) = (x^4 + 4x^2 + 1) + x(3x^2 + 2) = K(x^2) + xL(x^2) \quad \text{és} \quad g(\bar{x}) = K(x^2) - xL(x^2)$$

alakjából is beláthatjuk, ahol $K(x^2)$ és $L(x^2)$ az x^2 polinomjai. Így ugyanis a szorzat $G_1(x) = K^2(x^2) - x^2 L^2(x^2)$, ami szintén x^2 polinomja.