

Bővítsük a törtet $(1 - ab)(1 + ca)$ -val. (E szorzat 0-tól különböző, mert bármelyik tényezőjének eltűnése esetén a kifejezésnek sem volna értelme.) Így az előre is látható összevonások után megmaradó 4–4 tag egyszerű kiemelésekkel 2–2 kéttagú szorzatává alakítható. A számláló és nevező $1 + a^2$ közös tényezője biztosan pozitív, ezzel ismét egyszerűsíthetünk, tehát a kifejezés:

$$K = \frac{b + a^2c + c + a^2b}{1 - a^2bc - bc + a^2} = \frac{(b + c)(1 + a^2)}{(1 - bc)(1 + a^2)} = \frac{b + c}{1 - bc}.$$

Innen látjuk, hogy K akkor sem volna értelmezve, ha $1 - bc = 0$ volna.

A kifejezésben kétszer előforduló

$$(1) \quad \frac{a + b}{1 - ab} = d \quad \text{és} \quad \frac{c - a}{1 + ca} = e$$

hányadosok szerkezete, úgyszintén K -nak ezek beírásával adódó

$$(2) \quad K = \frac{d + e}{1 - de}$$

alakjáé, végül a fenti átalakítás eredményéé is – egyaránt a tangens-függvény addíciós képletét, a

$$(3) \quad \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

azonosságot juttatja eszünkbe, amelyből a $\operatorname{tg}(x - y)$ -ra ismert azonosság $\operatorname{tg}(-y) = -\operatorname{tg} y$ figyelembevételével adódik.

Ha tehát megkeressük azt a -90° és 90° közti α , β , γ szöget, amelyre

$$(4) \quad \operatorname{tg} \alpha = a, \quad \operatorname{tg} \beta = b, \quad \operatorname{tg} \gamma = c,$$

akkor (1)-ből (3) figyelembevételével

$$(5) \quad d = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \quad \text{és} \quad e = \operatorname{tg}(\gamma - \alpha).$$

Ezeket (2)-be helyettesítve hasonlóan

$$(6) \quad K = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\gamma - \alpha)} = \operatorname{tg}[(\alpha + \beta) + (\gamma - \alpha)] = \operatorname{tg}(\beta + \gamma).$$

Innen (3) alapján való átalakítással, végül (4) alapján az eredeti jelölésekre visszatérve közbülső számítások nélkül jutunk el az eredeti átalakítás végeredményéhez.

Meg kell jegyeznünk, hogy az említett α , β , γ szög bármely a , b , c esetén létezik, mert az $y = \operatorname{tg} x$ függvény minden értéket felvesz. Ha azonban vagy

$$(7) \quad 1 - ab = 0,$$

vagy

$$(8) \quad 1 + ca = 0$$

volna, vagy e két egyenlőség mindegyike teljesülne, akkor a goniometria átalakítás sem érvényes. Valóban, (7)-ből $ab = 1$, így a és b egyike sem 0, $b = 1/a$, vagyis $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$ tehát α és β vagy pótszögek, összegük 90° , vagy $\alpha + \beta = -90^\circ$, és ezek tangense nincs értelmezve; hasonlóan (8) fennállása esetén $c = -1/a$, $\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha)$, tehát $\gamma + (-\alpha) = \pm 90^\circ$, tehát (5)-nek nincs értelme. Ezekben az esetekben a goniometria átalakítás sem kezdhető el, – akárcsak az algebrai. És a megkezdett átalakítás nem fejezhető be (6)-tal, ha azt találjuk, hogy $\beta + \gamma = 90^\circ$, megfelelően az $1 - bc = 0$ esetre vonatkozó kizáró megjegyzésünknek.

Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn. II. o. t.)