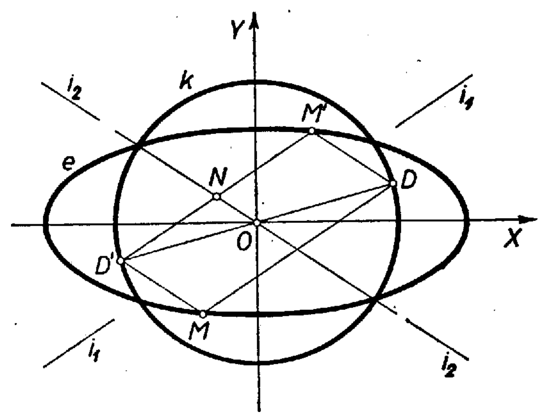
I. megoldás. Az átmérő D, D' végpontjai és a kérdéses M, M' metszéspontok paralelogrammát határoznak meg. M és M' mértani helye szimmetrikus k-nak O középpontjára, mert a paralelogramma egyik átlója DD'. Szimmetrikus a mértani hely a körben az i_1 és i_2-vel párhuzamos átmérők közti szögek f_1, f_2 felezőire is, mert ha a d' átmérő tükörképe f_1-re d'', akkor a d'' végpontjain átmenő, i_1-gyel párhuzamos egyenesek tükrösek a d' végpontjain átmenő, i_2-vel párhuzamos egyenesekkel és megfordítva.

Ha i_1 és i_2 merőlegesek, akkor a mértani hely maga k, hiszen így a $DMD'M'$ paralelogramma derékszögű, átlói egyenlők, tehát M és M' a k-n vannak, – és megfordítva k-nak bármely M pontjához található olyan DD' átmérő, amelyhez az előírás szerint szerkesztett metszéspontok egyike éppen M, éspedig DD'-t az M-hez tartozó MM' átmérő végpontjaiból az eredeti szerkesztéssel kapjuk.

Ha i_1 és i_2 nem merőlegesek, akkor több pontpár megszerkesztése után sejtjük, hogy a mértani hely ellipszis. Ezt a koordinátageometria módszereivel igazoljuk. Tengelyeknek az említett szögfelezőket célszerű választani, így az origó a k kör középpontja lesz, – egységnek pedig vegyük k sugarát. Legyen i_1 iránytangense m, így i_2 iránytangense $-m$. A szimmetria miatt, és mivel az $i_1 \perp i_2$ esetet már láttuk – ott $m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ –, elég a $0 < m < 1$ értékekre gondolnunk. (Nyilvánvaló ugyanis, hogy i_1 és i_2 különbözők, és így $m = 0$ lehetetlen.)



Vegyük D gyanánt k-nak (ξ, η) pontját, így $D'(-\xi, -\eta)$. A D-n átmenő i_2 és a D'-n átmenő i_2 irányú egyenes egyenlete:

(1)
$$y - \eta = m(x - \xi),$$

ill.

$$y + \eta = -m(x + \xi).$$

Innen M metszéspontjuk koordinátái:

(2)
$$x^* = -\frac{\eta}{m}, \qquad y^* = -m\xi,$$

a D-n átmenő i_2 irányú és a D'-n átmenő i_1 irányú egyenesek metszéspontja pedig hasonlóan $M'(-x^*, -y^*)$, ugyanis egyenletüket úgy kapjuk, ha (1) mindkét egyenletében m helyére $-m$-et írunk.

Az x^* és y^* között fennálló összefüggést abból kapjuk, hogy a (ξ, η) számpár kielégíti k-nak $x^2 + y^2 = 1$ egyenletét. (2)-ből

$$\xi = -\frac{y^*}{m}, \qquad \eta = -mx^*,$$

így

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{y^{*2}}{m^2} + m^2 x^{*2} = 1,$$

amit így is írhatunk:

(3)
$$\frac{x^{*2}}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{y^{*2}}{m^2} = 1.$$

Eszerint valóban minden $M(x^*, y^*)$ pont – és minden $M'(-x^*, -y^*)$ is – rajta van azon az ellipszisen, amelyre az x-tengelyen fekvő szimmetriatengely félhossza $1/m$, a másik tengelyé pedig m. (Ezek a feltevés folytán különbözők, az előbbi a nagy tengely.)

Fordítva, a (3) ellipszis bármely $M(x^*, y^*)$ pontjához található k-nak olyan DD' átmérője, amelyhez a feladat utasítása szerint szerkesztett metszéspontok egyike éppen M. Ugyanis az M-en átmenő i_1 irányú és $M'(-x^*, -y^*)$-on átmenő i_2 irányú egyenesek egyenlete

$$y - y^* = m(x - x^*), \qquad \text{ill.} \qquad y + y^* = -m(x + x^*),$$

ennélfogva D metszéspontjuk koordinátái:

$$\xi^* = -\frac{y^*}{m} \qquad \text{és} \qquad \eta^* = -mx^*,$$

ezekre (3) szerint ${\xi^*}^2 + \eta^{*2} = 1$, vagyis D a k-n van, továbbá (2) szerint a D-ből az eredeti szerkesztéssel kapott metszéspontok éppen M és M'.

Mindezek szerint a keresett mértani hely a (3) egyenlettel meghatározott e ellipszis.

Schőnweitz Tivadar (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

II. megoldás. $D'M'$ és az i_2-vel párhuzamos átmérő egyenesének metszéspontját N-nel jelölve ON a $DD'M'$ háromszög középvonala, ezért $M'N : D'N = 1$. Eszerint M' a D' pont megfelelője abban az affinitásban, amelynek iránya i_1, tengelye az O-n átmenő, i_2 irányú egyenes, és aránymutatója az egység – megjegyezve még, hogy a megfelelő pontok a tengely két oldalán helyezkednek el. (Más szóval: az aránymutató -1.) Mivel kör affin képe (általában) ellipszis, azért míg D leírja k-t, addig M a k-nak az említett affinitásban megfelelő ellipszist írja le.

Sebestyén Zoltán (Celldömölk, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az az affinitás, amelynek iránya i_2, tengelye a k-nak i_1-gyel párhuzamos átmérője, és aránymutatója 1, ugyancsak e-be viszi át k-t. A felcserélhetőség azon múlik, hogy az aránymutató értéke 1, ezért az ellipszis érinti k-nak i_1 és i_2-vel párhuzamos érintőit, e két irányra merőlegesen a szélessége egyenlő k átmérőjével.

2. Néhány megoldás rámutatott, hogy a feladatban „irány"-on nem vektort értettünk.