

A p^α szám összes pozitív osztói: $1, p, p^2, \dots, p^{\alpha-1}, p^\alpha$; mértani sorozatot alkotnak, a hányados p , a tagok száma $\alpha + 1$, tehát összegük

$$S_p = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$

A $p^\alpha p^\beta$ szám összes pozitív osztói $\alpha + 1$ oszlopból és $\beta + 1$ sorból álló táblázatba rendezhetők úgy, hogy az egy oszlopban álló osztókban p kitevője ugyanaz, q kitevője oszlopról oszlopra 0-tól 13-ig egyesével növekszik, – az egy sorban álló osztókban pedig q kitevője ugyanaz és p kitevője növekszik 0-tól α -ig.

$$(1) \quad \begin{array}{cccccc} 1, & p, & p^2, & \dots, & p^{\alpha-1}, & p^\alpha, \\ q, & pq, & p^2q, & \dots, & p^{\alpha-1}q, & p^\alpha q, \\ q^2, & pq^2, & p^2q^2, & \dots, & p^{\alpha-1}q^2, & p^\alpha q^2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots, & \cdot & \cdot \\ q^\beta, & pq^\beta, & p^2q^\beta, & \dots, & p^{\alpha-1}q^\beta, & p^\alpha q^\beta. \end{array}$$

Az első sorbeli osztók összege S_p , a második sorbelieké qS_p , a harmadikbelieké $q^2S_p, \dots$, az utolsó sorbelieké $q^\beta S_p$, ennél fogva valamennyi osztó összege:

$$S_p + qS_p + q^2S_p + \dots + q^\beta S_p = S_p(1 + q + q^2 + \dots + q^\beta) = S_p S_q,$$

ahol

$$S_q = \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}.$$

A $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ szám összes pozitív osztóit úgy írhatjuk fel, hogy az (1) táblázat számait egy sorba írjuk, mindegyiknek alája írjuk r -szeresét, majd r^2 -szeresét, $\dots$, r^γ -szorosát. Összegüket előbb soronként képezve, majd a sorösszegeket összeadva a fentiekhez hasonlóan nyerjük

$$\begin{aligned} S_p S_q + r S_p S_q + r^2 S_p S_q + \dots + r^\gamma S_p S_q &= \\ = S_p S_q (1 + r + r^2 + \dots + r^\gamma) &= S_p S_q S_r, \end{aligned}$$

ahol

$$S_r = 1 + r + r^2 + \dots + r^\gamma = \frac{r^{\gamma+1} - 1}{r - 1}.$$

Nyilvánvaló, hogy N és s^δ szorzatára nézve – ha s a p, q, r -től különböző törzsszám, és δ pozitív egész szám, – az osztók összege $S_p S_q S_r S_s$, ahol $S_s = 1 + s + s^2 + \dots + s^\delta = \frac{s^{\delta+1} - 1}{s - 1}$, és hasonlóan haladhatnánk tovább több prímszámhatvány szorzatára is.

Mármost $605 = 5 \cdot 11^2$, és $637 = 7^2 \cdot 13$, ennél fogva osztóik összege:

$$(1 + 5)(1 + 11 + 11^2) = 6 \cdot 133 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19, \text{ ill.}$$

$$(1 + 7 + 7^2)(1 + 13) = 57 \cdot 14 = 3 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 7, \text{ egyenlők.}$$

Hasonlóan $99 = 3^2 \cdot 11$ és $125 = 5^3$ -ből

$$(1 + 3 + 3^2)(1 + 11) = 13 \cdot 12 = 156 = 1 + 5 + 5^2 + 5^3, \text{ végül}$$

$$8\,214\,000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 37^2 \text{ és } 18\,396\,875 = 5^5 \cdot 7 \cdot 29^2$$

osztóinak az összegét véve az egyes törzstényezők szóba jövő hatványainak összegét mindjárt törzsszámhatványok szorzataivá alakítva:

$$31 \cdot 4 \cdot 156 \cdot 1407 = 31 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 67, \text{ ill.}$$

$$3906 \cdot 8 \cdot 871 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 2^3 \cdot 13 \cdot 67,$$

tehát mindkét megadott szám osztóinak az összege egyenlő $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 67$ -tel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A fordított feladat céljára a fentiekből látjuk, hogy valamely természetes szám összes pozitív osztóinak S összege csak olyan szám lehet, amelyhez található vagy egyetlen p törzsszám és α kitevő úgy, hogy p hatványainak összege a 0-iktól az α -dikig összegül éppen az adott számot adja, vagy amely felbontható több ilyen, – de különböző törzsszámokhoz tartozó – számok szorzatára. Ezért az adott 72 és 399 számokra és minden osztójukra megoldjuk az

$$(2) \quad 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha = S$$

egyenletet.

Itt két ismeretlen van: p és α . Ezért célszerűen úgy járhatunk el, ha előbb az $\alpha = 1, 2$ értékeket megválasztva a kapott első-, ill. másodfokú egyenlet gyökeit vizsgáljuk végig, hogy megfelelnek-e p gyanánt, majd p -t és hozzá $\alpha \geq 3$ -at választva képezzük (2) bal oldalát és megvizsgáljuk, melyik ilyen összeg szerepel az adott számok osztói között.

72-nek 2-nél nagyobb osztói

$$(3) \quad d = 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$$

(ugyanis $1 + p > 2$; egyébként emiatt $d = 36$ nem adhat megoldást). Innen $\alpha = 1$ kitevővel, vagyis az

$$1 + p = d$$

egyenletből a $p = 2, 3, 5, 7, 11, 17, 23, 71$ törzsszámok jönnek szóba. Eszerint a 71 szám mindjárt megfelelő. Másrészt, pq alakú számokat keresve az $(1 + p)(1 + q) = 72$ egyenletből q -ra

$$\frac{72}{1 + p} - 1 = 23, 17, 11, 8, 5, 3, 2$$

jön szóba; ezek a 8 kivételével prímek, tehát a

$$\begin{aligned} 72 &= 3 \cdot 24 = (1 + 2)(1 + 23), \\ &= 4 \cdot 18 = (1 + 3)(1 + 17), \\ &= 6 \cdot 12 = (1 + 5)(1 + 11) \end{aligned}$$

felbontásokból adódó $2 \cdot 23 = 46, 3 \cdot 17 = 51, 5 \cdot 11 = 55$ számok is megfelelnek. Hasonlóan az

$$(1 + p)(1 + q)(1 + r) = 72$$

egyenletből $p = 2$ és $q = 3, 5, 7, 11, 17, 23$ -mal r -re

$$\frac{72}{3(1 + q)} - 1 = 5, 3, 2, 1, \frac{1}{3}, 0$$

jön szóba. Közülük csak $r = 5$, vagyis $pqr = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ ad megoldást. Feltéhetjük, hogy $p < q < r$, így nyilvánvaló, hogy $p = 3$ -mal hasonló megoldás már nincs, és hogy a keresett számnak négy- és többféle törzstényezője sem lehet.

Hasonlóan $399 = 400 - 1 = 20^2 - 1 = 3 \cdot 7 \cdot 19$ osztói:

$$(4) \quad d = 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399;$$

valamennyi páratlan, ezért innen $\alpha = 1, \beta = 1, \dots$ -gyel nem kapunk megfelelő számot, mert $p > 2$ esetén $1 + p$ páros. Így $S = 399$ -et adó számban $\alpha = 1$ kitevővel csak $p = 2$ szerepelhet.

$\alpha = 2$ -vel az $1 + p + p^2 = d$ egyenlet pozitív gyöke

$$p = \frac{-1 + \sqrt{4d - 3}}{2}.$$

A (3)-beli osztókkal a diszkrimináns csak $d = 3$ esetében teljes négyzet, de innen $p = 1$, nem felel meg. A (4) értékekkel

$$\begin{aligned} d &= 3, 7, 21, 57, 133 - \text{ból} \\ p &= 1, 2, 4, 7, 11, \end{aligned}$$

amiből $p = 2, 7$ és 11 törzsszám. Mivel $d = 7$ és 57 a 399-nek kapcsolt osztói (szorzatuk 399), azért a $p = 2, \alpha = 2$ és $q = 7, \beta = 2$ -vel képezett $2^2 \cdot 72 = 196$ számra $S = 399$. Másrészt $p = 11$ -gyel

$$\frac{399}{1 + 11 + 11^2} = 3 = 1 + 2,$$

tehát $2 \cdot 11^2 = 242$ ugyancsak megfelelő.

Az $\alpha \geq 3$ kitevők mellett 2^α osztóinak összege $2^{\alpha+1} - 1 = 15, 31, 63, 127, 255$, egyik sem szerepel (3) és (4)-ben. Hasonlóan $p = 3$ -mal 40, 121 és 364, végül $p = 5$ -tel 156 sem. Nagyobb törzsszámról nem lehet szó, mert már $1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400 > 399$.

Mindezek szerint az osztók összege gyanánt

$$\begin{aligned} 72 - t &\text{ a } 71, 46, 51, 55 \text{ és } 30, \\ 399 - t &\text{ pedig a } 196 \text{ és } 242 \end{aligned}$$

számok esetében kapunk.

Katona Mária (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. Gimn., III. o. t.)
Nagy Ernő (Budapest, József A. Gimn., III. o. t.)