

a) $\operatorname{tg} x/2$ -t mindvégig t -vel jelöljük. A keresett azonosságokat legegyszerűbben a kétszeres szög szögfüggvényeinek alapján nyerhetjük:

$$(3) \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$(4) \quad \sin^2 x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

A törteket egyszerűsítettük $\cos^2 x/2$ -vel. Ezért a képletek minden x -re érvényesek, kivéve ha $\cos x/2 = 0$; ekkor $\operatorname{tg} x/2$ sincs értelmezve. (3) és (4) valóban racionális kifejezései t -nek.

b) (1)-nek egy megoldása A, B, C helyén J, K, L -lel az 1085. feladat I. megoldásában szerepel¹. A megfelelő betűket beírva

$$(5) \quad \sin x = \frac{AC \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2},$$

vagyis (1) bal oldalát kapjuk. Helyettesítsük másrészt (2)-be (3)-at és (4)-et. $1 + t^2$ -nel szorozva rendezés után

$$(B + C)t^2 - 2At + (C - B) = 0.$$

Innen

$$t = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B + C},$$

$$t^2 = \frac{2A^2 + B^2 - C^2 \pm 2A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{(B + C)^2},$$

tehát (4)-ből

$$(6) \quad \sin x = \frac{2(B + C)(A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2})}{(B + C)^2 + 2A^2 + B^2 - C^2 \pm 2A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}} =$$

$$= \frac{(B + C)(A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2})}{A^2 + B^2 + BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}},$$

az (1) jobb oldalán álló kifejezés.

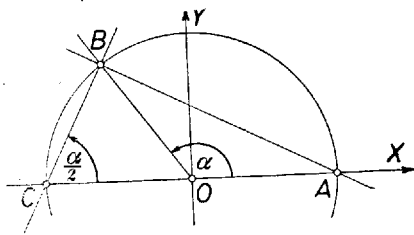
(5)-öt és (6)-ot külön utakon nyertük, ezért még meg kell vizsgálnunk, hogy pl. (6)-ban a két négyzetgyököt $+$ jellel véve melyik jellel kell vennünk az (5)-beli négyzetgyököt. Ehhez elég egy numerikus próbát tennünk A, B, C olyan értékhármassával, amelyre $A^2 + B^2 - C^2 \neq 0$. Legyen pl. $A = B = C = 1$. Így (6) értéke 1, (5) értéke pedig a gyököt $+$, ill. $-$ jellel véve 1, ill. 0. Eszerint a két kifejezés valóban akkor egyenlő, ha (5)-ben a gyököt $+$ jellel vesszük.

Ujvári Erzsébet (Dombóvár, Gógös I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Többen (3)-hoz és (4)-hez a

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

képlet alapján jutottak el. Így azonban $\sin x$ esetében külön rá kell mutatni arra, hogy $\sin x$ és $\operatorname{tg} x/2$ előjele bármely x -re megegyező.



¹K. M. L. 23 (1961) 131. o.

2. 180° -nál kisebb abszolút értékű szögekre az első állítást az alábbiak szerint is beláthatjuk. Az α szöget ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) a szokásos módon a derékszögű koordinátarendszerbe illesztve legyen a nyugvó, ill. mozgó szárnak az egységkörön levő pontja A , B , és a $(-1, 0)$ pont C . Ekkor $\angle BCA = \alpha/2$, tehát a CB és a rá merőleges AB egyenes iránytangense $\tan \alpha/2 = t$, ill. $-1/t$, másrészt B koordinátái $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$. B -t a CB és AB egyenesek metszéspontjának tekintve koordinátái az

$$y = t(x + 1), \quad y = -\frac{1}{t}(x - 1)$$

egyenletrendszerből (4), ill. (3)-nak adódnak. Azt, hogy x és y a t -vel racionálisan fejezhető ki, előre látjuk, hiszen t nem fordul elő gyökjel alatt, a rendszer elsőfokú, és minden elsőfokú egyenletrendszer megoldása – ha létezik – a négy alapművelettel kiszámítható.

Végül ábránkat az X tengelyre tükrözve meggondolásunk a $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$ forgásokra is érvényesnek adódik.

Farkas Zoltán (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., III. o. t.)