I. megoldás. Írjuk a nevezőket törzsszám-szorzat alakjában és hozzuk közös nevezőre a kifejezést:

$$\frac{3^{2n}}{2^4\cdot 7}-\frac{4^{2n}}{3^2\cdot 7}+\frac{5^{2n}}{2^4\cdot 3^2}=-\frac{9\cdot 3^{2n}-16\cdot 4^{2n}+7\cdot 5^{2n}}{2^4\cdot 3^2\cdot 7}.$$

Eszerint elég azt megmutatnunk, hogy a számláló osztható 2^4-nel, 3^2-nel és 7-tel, – ezek ugyanis egymáshoz relatív prímek. Ehhez átalakítjuk a számlálót és felhasználjuk azt az ismert tételt, hogy ha a, b egész számok és n természetes szám, akkor a^n-b^n osztható $a-b$-vel: $a^n-b^n=(a-b)M$, ahol M egész szám. Így a számláló egyrészt

$$\begin{gathered}(16-7)3^{2n}+7\cdot 5^{2n}-16\cdot 4^{2n}=7(25^n-9^n)-16(16^n-9^n)=\\ =7(25-9)M_1-16(16-9)M_2=16\cdot 7(M_1-M_2)=2^4\cdot 7\cdot M_3,\quad \text{– másrészt}\\ 9\cdot 3^{2n}-(9+7)4^{2n}+7\cdot 5^{2n}=9(3^{2n}-4^{2n})+7(25^n-16^n)=9M_4+\\ +7(25-16)M_5=9(M_4+7M_5)=3^2M_6.\end{gathered}$$

Ha pedig $n=0$, akkor a kifejezés értéke 0, egész szám. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Fukker Gábor (Győr, Czuczor G. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A fenti oszthatóság $n\geq 1$ esetére az $(a^n-b^n):(a-b)$ osztás

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$$

hányadosának kiírásával egyetlen átalakításban mutatható meg. A számláló

$$\begin{gathered}9\cdot 9^n-9\cdot 16^n-7\cdot 16^n+7\cdot 25^n=9\cdot 7\left(\frac{25^n-16^n}{9}-\frac{16^n-9^n}{7}\right)=\\ =9\cdot 7\big[(25^{n-1}+25^{n-2}\cdot 16+\ldots+16^{n-1})-(16^{n-1}+16^{n-2}\cdot 9+\ldots+9^{n-1})\big].\end{gathered}$$

A szögletes zárójel minden közbülső tagja osztható 16-tal, ugyanígy az első és utolsó tag különbsége is.

Náray Szabó Gábor (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

2. Többen kongruenciák felhasználásával bizonyították az állítást.

II. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=0$-ra és $n=1$-re a kifejezés értéke 0, egész szám, az állítás igaz. Feltesszük, hogy

$$k>0,\quad \text{egész és}\quad N_k=\frac{3^{2k}}{112}-\frac{4^{2k}}{63}+\frac{5^{2k}}{144}\ \text{ egész,}$$

és megmutatjuk, hogy N_{k+1} ugyancsak egész. Valóban

$$\begin{gathered}N_{k+1}=\frac{3^{2(k+1)}}{112}-\frac{4^{2(k+1)}}{63}+\frac{5^{2(k+1)}}{144}=\frac{9\cdot 3^{2k}}{112}-\frac{16\cdot 4^{2k}}{63}+\frac{25\cdot 5^{2k}}{144}=\\ =9\left(\frac{3^{2k}}{112}-\frac{4^{2k}}{63}+\frac{5^{2k}}{144}\right)+\frac{16\cdot 5^{2k}}{144}-\frac{7\cdot 4^{2k}}{63}=9N_k+\frac{5^{2k}-4^{2k}}{9}=\\ =9N_k+\frac{25^k-16^k}{25-16},\end{gathered}$$

és az utolsó alak második tagja a fentiek szerint egész szám.

Zalay Miklós (Budapest, XVIII. Hengersor úti ált. g. III. o. t.)