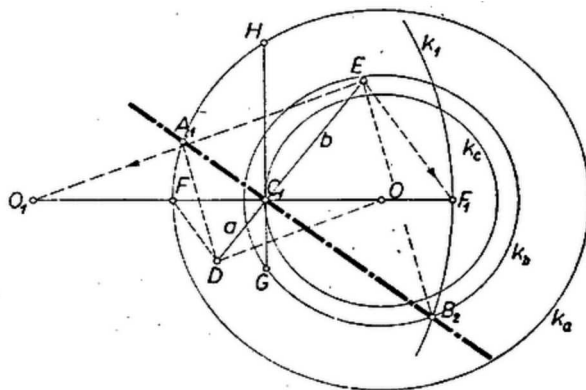


I. megoldás. Legyenek a körök rendre k_a, k_b, k_c , közös középpontjuk O , sugaruk $OA_1 = r_a, OB_1 = r_b$ ill. $OC_1 = r_c$; nyilvánvaló, hogy $r_a > r_b > r_c$. A keresett szelő egy pontját tetszés szerint választhatjuk, legyen ez C_1 a k_c -n. C_1 az A_1B_2 szakasz belsejében van, ez az előírt aránnyal együtt azt jelenti, hogy A_1 -et C_1 -től $b : a$ arányban távolítva, egyszersmind C_1 körül 180° -kal elforgatva B_2 -be jutunk. Eszerint B_2 -t k_b -ből azzal a k_1 körrel metszhetjük ki, amely k_a -ból C_1 körüli 180° szögű és $b : a$ arányú forgatva nyújtással áll elő.



Ennek alapján a szerkesztés a következő: egy a C_1 -en átmenő és C_1O -tól különböző egyenesre C_1 két oldalára felmérjük az a , b szakaszokat; legyen a két végpont D , ill. E , továbbá az OC_1 félegyenesnek k_a -n levő pontja F . Párhuzamost húzunk E -n át OD -vel és DF -fel; legyen az OC_1 -gyel való metszéspontjuk O_1 ill. F_1 . Ekkor az O_1 körül O_1F_1 sugárral írt kör k_1 , ennek k_b -vel való metszéspontja B_2 , a keresett szelő C_1B_2 , és ebből A_1 -et a D -n átmenő, EB_2 -vel párhuzamos egyenes metszi ki.

Ugyanis C_1 szétválasztja a D , E , az O , O_1 és az F , F_1 pontpárokat, ezért az EO_1 és DO , valamint EF_1 és DF félegyenesek ellentétes irányúak, tehát az O_1EF_1 és ODF szögek váltószögek, továbbá a C_1EO_1 és C_1DO , valamint C_1EF_1 és C_1DF hasonló helyzetű háromszög párokból

$$EO_1 : DO = b : a = EF_1 : DF.$$

Így az O_1EF_1 és ODF háromszögek hasonlóságából $O_1F_1 : OF = b : a$, másrészt $O_1C_1 : OC_1 = b : a$, tehát az O_1 körül O_1F_1 sugárral írt kör valóban a fenti k_1 . Továbbá a C_1DA_1 háromszög hasonló C_1EB_2 -höz, ezért $C_1A_1 : C_1B_2 = C_1D : C_1E = a : b$, tehát A_1 , mint a k_1 -en levő B_2 -nek megfelelője a fenti forgatva nyújtás megfordításában, rajta van k_a -n. (Ezt tudva a végrehajtás DA_1 egyenese mellőzhető.)

A B_2 metszéspont létrejön, ha az OB_2 , OO_1 és O_1F_1 szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni. Mármint $OO_1 = OC_1 + C_1O_1 = r_c + br_c/a = (a+b)r_c/a$, másrészt $O_1F_1 = br_a/a$, ezért $-a$ -t és b -t csupán arányszámoknak tekintve és mindhárom szakaszt a -val szorozva – az

$$(1) \quad ar_b, \quad br_a, \quad (a+b)r_c$$

szakaszoknak kell a háromszög-egyenlőtlenséget teljesíteniük.

Ha valódi háromszög jön létre, akkor k_1 2 pontban metszi k_b -t, de a két megoldás nem lényegesen különböző, mert OC_1 -re, mint tengelyre tükrösek. Ha a háromszög egyenes szakasszá fajul el, akkor k_1 érinti k_b -t, tehát B_2 az OC_1 -en adódik.

Azonban B_2 csak akkor lesz a szelőnek és k_b -nek C_1 -től (és A_1 -től) távolabbi, C_1 -ből „nem látható” metszéspontja, ha a k_c -hez C_1 -ben húzott érintőnek azon az oldalán van, mint O , más szóval az O_1 -gyel ellentétes oldalon. Kell tehát, hogy az érintő és k_b metszéspontját G -vel jelölve $O_1G^2 < O_1B_2^2$, azaz

$$(2) \quad \begin{aligned} C_1 O_1^2 + C_1 G^2 &= C_1 O_1^2 + O G^2 - O C_1^2 < O_1 F_1^2, \quad \text{vagyis} \\ \frac{b^2}{a^2} \cdot r_c^2 + r_b^2 - r_c^2 &< \frac{b^2}{a^2} \cdot r_a^2. \end{aligned}$$

Ha (1) fennáll, de (2) nem, akkor k_1 és k_b metszéspontja a B_1 szerepét játssza.

Gálfi László (Budapest, I. István Gimn. III. o. t)

Megjegyzések. 1. Kiindulásul A_1 -et vagy B_2 -t rögzítve lényegében ugyanilyen szerkesztéssel érünk célhoz. – (2) így is írható:

$$\frac{r_b^2 - r_c^2}{r_a^2 - r_c^2} < \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{C_1 G}{C_1 H} < \frac{b}{a},$$

ahol H a felhasznált érintőnek k_a -val való metszéspontja. Ehhez szemlélet útján is eljuthatunk. A keresett szelő i irányát megválasztva induljunk ki az O -n átmenő i irányú szelőből, majd távolítsuk ezt O -tól mindaddig, amíg van közös pontja k_c -vel, vagyis míg érinti k_c -t. Eközben – a szemlélet szerint – A_1C_1 állandóan növekszik és legnagyobb

értéke az érintő helyzetben HC_1 , viszont C_1B_2 állandóan csökken és legkisebb értéke a véghelyzetben C_1G . Ezek szerint, ha van megoldás, akkor a számlálót csökkentve, majd a nevezőt növelve a hányados értéke mindkét lépésben kisebbnek adódik, tehát

$$\frac{b}{a} = \frac{C_1B_2}{A_1C_1} > \frac{C_1G}{A_1C_1} > \frac{C_1G}{HC_1}.$$

Knuth Előd (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)

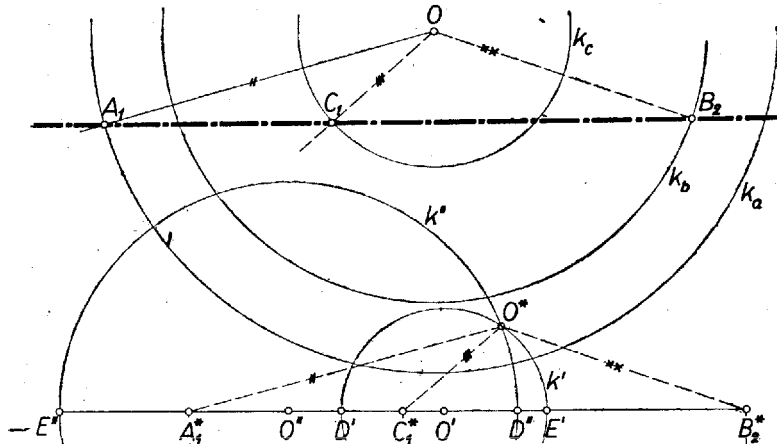
2. Ugyaninnen adódik, hogy C_1B_2 legnagyobb értéke $r_c + r_b$, A_1C_1 legkisebb értéke $r_a - r_c$, tehát B_2 létrejövésének feltétele

$$\frac{b}{a} < \frac{r_c + r_b}{r_a - r_c}, \quad \text{amiből} \quad br_a - ar_b < (a + b)r_c.$$

Ezzel lényegében (1)-et ismételtük meg. Ugyanis a háromszög-egyenlőtlenség másik részét mellőzhetjük, hiszen az ar_b és br_a „oldalak” összege $r_a > r_b > r_c$ folytán nagyobb a harmadik oldalnál:

$$ar_b + br_a > ar_c + br_c = (a + b)r_c.$$

II. megoldás. Mérjük fel – köreink síkjában bárhol – az $A_1^*C_1^* = a$ szakaszt, ennek meghosszabbítására a $C_1^*B_2^* = b$ szakaszt és keressünk olyan O^* pontot, hogy az A_1^*, C_1^*, B_2^*, O^* pontnégyes hasonló legyen a keresett A_1, C_1, B_2, O pontnégyeshez.



Ez fennáll ha

$$\frac{O^*A_1^*}{O^*C_1^*} = \frac{OA_1}{OC_1} = \frac{r_a}{r_c} = \lambda' \quad \text{és} \quad \frac{O^*C_1^*}{O^*B_2^*} = \frac{OC_1}{OB_2} = \frac{r_c}{r_b} = \lambda''.$$

Ismeretes, hogy e feltételeknek (külön-külön) eleget tevő O^* pontok mértani helye egy-egy kör, pl. az első feltétellel nézve az A_1^* és C_1^* alappontokhoz és a $\lambda' (\neq 1)$ aránymutatóhoz tartozó ún. Apollóniosz-kör, melynek egy $M'N'$ átmérőjét az $A_1^*C_1^*$ egyenesnek azok az M', N' pontjai tűzik ki, melyekre

$$(3) \quad A_1^*M' : M'C_1^* = A_1^*N' : N'C_1^* = \lambda' \quad \text{és} \quad A_1^*M' + M'C_1^* = A_1^*N' - C_1^*N' = A_1^*C_1^*.$$

Az M' belső osztópont az $A_1^*C_1^*$ szakaszon, az N' külső osztópont pedig $\lambda' > 1$ miatt a $C_1^*B_2^*$ félegyenesen van. (Hasonlóan a $C_1^*B_2^*$ szakasz külső osztópontja a $C_1^*A_1^*$ félegyenesen van, mert $0 < \lambda'' < 1$. A kör középpontja ugyancsak a $C_1^*B_2^*$ félegyenesen van.)

E két kör megszerkeszthető, egyik közös pontjuk megfelel O^* gyanánt. Ennek alapján egy megfelelő A_1, C_1 pontpárt azok az O -ból kiinduló félegyenesek metszenek ki k_a , ill. k_c -ből, amelyek párhuzamosak és egyirányúak az $O^*A_1^*$, ill. $O^*C_1^*$ félegyenessel, a szelőt pedig A_1 és C_1 összekötésével kapjuk.

A szerkesztés helyességének bizonyítását az olvasókra bízuk. A diszkusszióhoz is csak megjegyezzük, hogy O^* létrejön, ha mindegyik külső osztópont kívül esik a másik körön, vagy a kerületén van. A sorrend akkor lesz megfelelő, ha az $O^*C_1^*A_1^*$ szög nem hegyesszög, vagyis $O^{*2}A_1^* \geq O^{*2}C_1^{*2} + A_1^*C_1^{*2}$. Lényegében 1, vagy 0 megoldás van.

Nováky Béla (Budapest, I. István Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. A szerkesztés egy egyszerű végrehajtása: A_1^*, C_1^*, B_2^* -től a rajtuk át húzott tetszés szerinti irányú párhuzamos egyenesekre az $A_1^*C_1^*$ egyenes egyik oldalán felmérjük r_a -t, r_c -t, r_b -t, továbbá a C_1^* -on átmenő egyenes másik oldalára is r_c -t. A végpontokat A', C', B', C'' -vel jelölve a fenti M', N', M'', N'' osztópontokat $A_1^*C_1^*$ -ből rendre az $A'C'', A'C', B'C'', B'C'$ egyenesek metszik ki.