

Adott x, y értékek esetén (2) és (3)-ból ki kellene számítanunk u és v lehetséges értékeit, majd ezeket minden lehetséges módon párokba kapcsolva (1) alapján ki kellene számítanunk z értékét. Ez után adhatnánk választ, hogy hány különböző z értéket kaptunk. – Ezt a vizsgálatot általában kell elvégeznünk.

A (2) és (3)-ból adódó

$$(2') \quad u^2 - xu + 1 = 0, \quad \text{ill}$$

$$(3') \quad v^2 - yv + 1 = 0$$

egyenletből u -ra, ill. v -re:

$$u_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \quad \text{ill.} \quad v_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Ezek az $|x| \geq 2, |y| \geq 2$ feltevés miatt valóságosak. A különböző gyökök száma $|x| \geq 2$, ill. $|y| \geq 2$ esetén kettő, $|x| = 2$, ill. $|y| = 2$ esetén egy. Mindkét egyenletben a két gyök egymás reciproka, mert (2') és (3') állandó tagjaiból $u_1 u_2 = 1$, és $v_1 v_2 = 1$. (Innen azt is látjuk, hogy u_1, u_2, v_1, v_2 egyike sem 0.) Így a szóba jövő értékek:

$$\begin{aligned} |x| > 2 \text{ esetén: } u_1 \text{ és } \frac{1}{u_1}; & \quad |y| > 2 \text{ esetén: } v_1 \text{ és } \frac{1}{v_1}; \\ |x| = 2 \text{ esetén: } u_1 = \frac{x}{2}; & \quad |y| = 2 \text{ esetén: } v_1 = \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Ezek szerint az egymástól különböző u, v értékpárok a következők:

$$\alpha) |x| > 2 \text{ és } |y| > 2 \text{ esetén: I } (u_1, v_1), \text{ II } \left(u_1, \frac{1}{v_1}\right), \text{ II}' \left(\frac{1}{u_1}, v_1\right), \text{ I}' \left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{v_1}\right);$$

$$\beta) |x| > 2 \text{ és } |y| = 2 \text{ esetén: III } \left(u_1, \frac{y}{2}\right), \text{ III}' \left(\frac{1}{u_1}, \frac{y}{2}\right); \text{ ahol } \frac{y}{2} \text{ vagy } +1, \text{ vagy } -1;$$

$$\gamma) |x| = 2 \text{ és } |y| > 2 \text{ IV } \left(\frac{x}{2}, v_1\right), \text{ esetén: IV}' \left(\frac{x}{2}, \frac{1}{v_1}\right); \text{ ahol } \frac{x}{2} \text{ vagy } +1, \text{ vagy } -1;$$

$$\delta) |x| = 2 \text{ és } |y| = 2 \text{ esetén: } \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

ahol $x \neq y$ miatt $\frac{x}{2}$ vagy $+1$ vagy -1 , $\frac{y}{2}$ pedig -1 , ill. $+1$.

Ezek az értékpárok nem minden esetben adnak különböző z értékeket, mert pl. a II' értékpár tagjai rendre a II tagjainak reciprocai, ezért II' behelyettesítésekor ugyanazt a két tagot kapjuk, mint II-ből, csak fordított sorrendben, ugyanis

$$u_1 \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{1}{u_1 \cdot \frac{1}{v_1}} = \frac{1}{u_1} \cdot v_1 + \frac{1}{\frac{1}{u_1} \cdot v_1} = \frac{u_1}{v_1} + \frac{v_1}{u_1}.$$

Ugyanez a kapcsolat áll fenn I és I', III és III', IV és IV' között, ezért z az $\alpha)$ esetben legfeljebb 2 különböző értéket vehet fel, a $\beta) - \delta)$ esetekben csak 1 értéket.

Az $\alpha)$ esetben I és II-ből

$$z_1 = u_1 v_1 + \frac{1}{u_1 v_1}, \quad z_2 = \frac{u_1}{v_1} + \frac{v_1}{u_1}.$$

Ezek különbözők, mert különbségük így alakítható:

$$z_1 - z_2 = u_1 \left(v_1 - \frac{1}{v_1}\right) - \frac{1}{u_1} \left(v_1 - \frac{1}{v_1}\right) = \left(u_1 - \frac{1}{u_1}\right) \left(v_1 - \frac{1}{v_1}\right),$$

és ez csak akkor 0, ha az $u_1 = 1/u_1$ és $v_1 = 1/v_1$ egyenlőségeknek legalább az egyike fennáll. Ekkor viszont $|u_1| = 1$, ill. $|v_1| = 1$, így (2)-ből $|x| = 2$, ill. (3)-ból $|y| = 2$, tehát a $\beta) - \delta)$ esetek valamelyikével állnánk szemben. – A keresett másodfokú egyenlet céljára összegük és szorzatuk így írható:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= u_1 \left(v_1 + \frac{1}{v_1}\right) + \frac{1}{u_1} \left(\frac{1}{v_1} + v_1\right) = \left(u_1 + \frac{1}{u_1}\right) \left(v_1 + \frac{1}{v_1}\right) = xy, \\ z_1 z_2 &= u_1^2 + \frac{1}{v_1^2} + v_1^2 + \frac{1}{u_1^2} = \left(u_1 + \frac{1}{u_1}\right)^2 - 2 + \left(v_1 + \frac{1}{v_1}\right)^2 - 2 = x^2 + y^2 - 4, \end{aligned}$$

tehát a keresett egyenlet:

$$(4) \quad z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = z^2 - xyz + x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

A β) esetben

$$y = 2 \text{ mellett } z = u_1 + \frac{1}{u_1} = x,$$

$$y = -2 \text{ mellett } z = -u_1 - \frac{1}{u_1} = -x,$$

tehát az egyenlet vagy $z - x = 0$, vagy $z + x = 0$.

Hasonlóan a γ) esetben a $z - y = 0$, vagy $z + y = 0$ egyenletre jutunk.

Végül a δ) esetben $z = (+1)(-1) + \frac{1}{(+1)(-1)} = -2$, vagyis az egyenlet $z + 2 = 0$.

Az $x \neq y$ megszorítás csak a δ) esetet érinti. Ha ugyanis $x = y \neq \pm 2$, akkor az I és II értékpárok is és a belőlük adódó z értékek is különböznek.

Gálfi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A β) – δ) esetekben nyert egyenleteket (4)-ből is megkaphatjuk y , vagy x , vagy mindkettőjük helyére $+2$ -t, vagy -2 -t írva. (4)-nek minden ilyen esetben (és csak ilyenkor) kétszeres gyöke van, mert diszkriminánsa

$$x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16 = x^2(y^2 - 4) - 4(y^2 - 4) = (x^2 - 4)(y^2 - 4) = 0,$$

tehát ilyenkor (4) bal oldala az egyetlen 0-helyhez tartozó gyöktényező négyzete. Mivel pedig a keresett egyenletnek nem lehet kétszeres gyöke, azért (4) bal oldalának négyzetgyökét tesszük 0-val egyenlővé. Pl. $y = -2$ -vel

$$(4') \quad z^2 + 2xz + x^2 = (z + x)^2 = 0 \quad \text{helyett:} \quad z + x = 0.$$