

I. megoldás. Vegyük észre, hogy az együtthatók összege 0, vagyis az $x_1 = 1$ szám gyöke az egyenletnek. Továbbá x páros és páratlan kitevős hatványai együtthatóinak összege külön-külön is 0, eszerint $x_2 = -1$ is gyök. A talált x_1 és x_2 nem függ k -tól. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A további két gyök vizsgálata céljára osszuk az egyenlet bal oldalát a talált gyökökhöz tartozó gyöktényezőkre $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ szorzatával:

$$\frac{x^4 - (k+3)x^3 - (k-11)x^2 + (k+3)x + (k-12)}{x^2 - 1} = x^2 - (k+3)x - (k-12).$$

Eszerint a további gyökök az

$$x^2 - (k+3)x - (k-12) = 0$$

egyenlet gyökei. Ezek akkor valósak, ha a diszkrimináns nem negatív:

$$\begin{aligned} D &= (k+3)^2 + 4(k-12) = k^2 + 10k - 39 = (k+5)^2 - 64 = \\ &= (k+5-8)(k+5+8) = (k-3)(k+13) \geq 0. \end{aligned}$$

Eszerint k nem eshet -13 és $+3$ közé, a keresett feltétel: $k \leq -13$ és $k \geq 3$.

Bácsy Zsolt (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás. (*A feladat 1. részére.*) A k -t tartalmazó tagokat különválasztva az egyenlet:

$$x^4 - 3x^3 + 11x^2 + 3x - 12 - k(x^3 + x^2 - x - 1) = 0.$$

A k -tól független gyököknek egyrészt 0-vá kell tennie a k -val szorzott polinomot, másrészt a k -t nem tartalmazó tagokból álló polinomot is. Mivel

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x-1) - (x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2,$$

azért a k -t tartalmazó rész csak $x = 1$ és $x = -1$ mellett tűnik el. Ezekkel a k -t nem tartalmazó rész is eltűnik, tehát ezek az egyenlet k -tól független gyökei.

Kerényi Ilona (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. III. o. t.)

III. megoldás. (*A feladat 1. részére.*) A k -tól független gyök csak azok közül a gyökök közül kerülhet ki, amelyeket a k egy tetszős szerint választott értékével adódó egyenletből kapunk. Célszerű $k = -3$ -at választani, mert így x^3 és x együtthatója 0, és az egyenlet másodfokúra redukálható: $x^4 + 14x^2 - 15 = 0$. Innen $(x^2)_1 = 1$, $(x^2)_2 = -15$, az előbbiből $x_{1,2} = \pm 1$, az utóbbiból adódó gyökpár nem valós.

x_1 és x_2 a k értékétől függetlenül kielégíti az egyenletet.

Farkas Zoltán (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A feladat eredetileg hibásan közölt alakjában a k -t tartalmazó részt 0-vá tevő $x_{1,2} = \pm 1$ számok mellett a k -t nem tartalmazó rész nem tűnt el. Az így nyilvánvalóan szükséges helyesbítés úgyis elképzelhető volt, ha az utolsó tagban $k-12$ helyett $k-2$ -t írtunk. Ekkora további két gyök az $x^2 - (k+3)x - (k-2) = 0$ egyenletből adódik és ezek valósak, ha $k \leq -5 - \sqrt{24}$, vagy ha $k \geq -5 + \sqrt{24}$.

Méder László Ferenc (Kolozsvár [Cluj], „Ady-Sincai” középiskola X. o. t.)