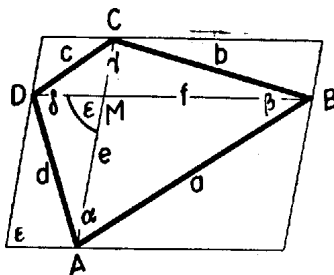


I. megoldás. Legyenek az $ABCD$ négyszögnek az A, B, C, D csúcsnál fekvő, szögei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, oldalai $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, átlói $AC = e$, $BD = f$, a köztük levő szög ε , végül a terület t (1. ábra).



1. ábra

– A BDA és BDC , valamint ACB és ACD háromszögpárokból az átlók négyzetére

$$(1) \quad f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma,$$

$$(2) \quad e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta,$$

és innen

$$(1a) \quad ad \cos \alpha - bc \cos \gamma = \frac{1}{2}(a^2 - c^2) - \frac{1}{2}(b^2 - d^2),$$

$$(2a) \quad ab \cos \beta - cd \cos \delta = \frac{1}{2}(a^2 - c^2) + \frac{1}{2}(b^2 - d^2).$$

Ugyanezen háromszögpárokból a terület 2-szeresére

$$(1b) \quad ad \sin \alpha + bc \sin \gamma = 2t,$$

$$(2b) \quad ab \sin \beta + cd \sin \delta = 2t.$$

(1a) és (1b) az α és γ -ra, (2a) és (2b) a β és δ -ra nézve olyan típusú egyenletrendszer, amelyet az 1076. feladatban adott számokkal megoldottunk, ugyanis bármelyik szög koszinuszának és szinuszának együtthatói abszolút értékben egyenlők.¹

A megoldási eljárás vázolója céljára az együtthatókat egy-egy új betűvel jelölve két rendszerünk közös általános alakja:

$$(3) \quad E \cos x - F \cos y = G,$$

$$(4) \quad E \sin x + F \sin y = H.$$

Az 1076/I-beli gondolatmenettel küszöböljük ki y -t, felírva azt, hogy $\cos y$ és $\sin y$ kifejezéseinek négyzetösszege 1-gyel egyenlő. Mindjárt F^2 -nel szorozva:

$$(5) \quad \begin{aligned} (E \cos x - G)^2 + (H - E \sin x)^2 &= F^2, \\ 2EG \cos x + 2EH \sin x &= H^2 + G^2 + E^2 - F^2. \end{aligned}$$

Ilyen típusú egyismeretlenes trigonometriai egyenlet megoldását ugyanott az a) részben láttuk. Ismét új betűkkel általános alakja:

$$(6) \quad J \cos x + K \sin x = L.$$

A bal oldal egyik tagját különválasztva, majd négyzetre emeléssel x egyik függvényére másodfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} J^2 \cos^2 x &= J^2 - J^2 \sin^2 x = L^2 - 2KL \sin x + K^2 \sin^2 x, \\ (J^2 + K^2) \sin^2 x - 2KL \sin x + L^2 - J^2 &= 0, \quad (J^2 + K^2 \neq 0) \end{aligned}$$

ahonnan $\sin x$ -re, majd (6) alapján $\cos x$ -re

$$(7) \quad \sin x = \frac{KL \pm J\sqrt{J^2 + K^2 - L^2}}{J^2 + K^2},$$

$$(8) \quad \cos x = \frac{L - K \sin x}{J} = \frac{JL \mp K\sqrt{J^2 + K^2 - L^2}}{J^2 + K^2}.$$

¹ Lásd ezen számban, 119. o. Az előjelek is mindkét rendszerben az egyik szögre egyenlők, a másokra ellentétesek; ez azonban lényegtelen, hiszen pl. α és γ ezen megkülönböztetett szerepe (1a)-nak (-1) -gyel való szorzásával felcserélődik.

Ez $J^2 + K^2 - L^2 \leq 0$ esetén x -re 2, 1, 0 valós megoldást ad, és – mint az 1076/I. megoldásban láttuk – nincs szükség idegen gyökök eltávolítására. Ezekből (3) és (4) alapján egyértelműen megkapjuk a megfelelő y -t.

Ezzel megadtuk az eljárást a szögek kiszámítására. Ezekből az átlók (1) és (2) alapján számíthatók. Végül az átlók hajlásszögére

$$(9) \quad t = \frac{1}{2}ef \sin \varepsilon\text{-ből} \quad \sin \varepsilon = \frac{2t}{ef}.$$

Ugyanis az átlókkal a csúcsokon át húzott párhuzamosok egy e , f oldalú és ε szögű paralelogrammát határoznak meg, és ezt az átlók négy paralelogrammára bontják. Ezek mindegyikének egyik átlója a négyszög egyik oldala, és így területük összegének fele adja a négyszög területét.

Számadatainkkal az α , γ szögpárra $E = ad = 8$, $F = bc = 18$, $G = (a^2 - c^2 - b^2 + d^2)/2 = 10$, $H = 2t = 20$. Ezekből $x = \alpha$ céljára $J = 2EG = 160$, $K = 2EH = 320$, $L = H^2 + G^2 + E^2 - F^2 = 240$, tehát 80-nal egyszerűsítve (6), (7) és (8) így alakul:

$$2 \cos \alpha + 4 \sin \alpha = 3, \quad \sin \alpha = \frac{6 \pm \sqrt{11}}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{3 \mp 2\sqrt{11}}{10},$$

ahonnan $\alpha_1 \approx 111,30^\circ$, $\alpha_2 \approx 15,56^\circ$. – A (3) és (4)-nek megfelelő egyenletekből

$$\sin \gamma = \frac{38 \mp 2\sqrt{11}}{45}, \quad \cos \gamma = \frac{-19 \mp 4\sqrt{11}}{45}, \quad \gamma_1 \approx 135,81^\circ, \quad \gamma_2 = 97,32^\circ.$$

A β , δ szögpárra $x = \beta$ -val hasonlóan $E = ab = 3$, $F = cd = 48$, $G = -45$, $H = 20$, majd $J = -270$, $K = 120$, $L = 130$, és így $-27 \cos x + 12 \sin x = 13$, ill. $873 \sin^2 \beta - 312 \sin \beta - 560 = 0$ -ból

$$\sin \beta = \frac{52 \pm 72\sqrt{11}}{291}, \quad \cos \beta = \frac{-117 \pm 32\sqrt{11}}{291}, \quad \beta' \approx 92,14^\circ, \quad \beta'' \approx 219,93^\circ,$$

végül

$$\sin \delta = \frac{236 \mp 9\sqrt{11}}{582}, \quad \cos \delta = \frac{531 \pm 4\sqrt{11}}{582}, \quad \delta' \approx 20,74^\circ, \quad \delta'' \approx 27,18^\circ.$$

Mivel β és δ számítása független α és γ számításától, viszont az $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ összefüggésnek teljesülnie kell, azért az összetartozó értékpárokat próbával kell megállapítanunk.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \gamma_1 &\approx 247,11^\circ, & \beta' + \delta' &\approx 112,88^\circ, \\ \alpha_2 + \gamma_2 &\approx 112,88^\circ, & \beta'' + \delta'' &\approx 247,11^\circ, \end{aligned}$$

ezért egyrészt az α_1 , γ_1 pár a β' , δ' párral, másrészt az α_2 , γ_2 pár a β'' , δ'' párral alkot egy megoldást.

Ez a megfelelő párba állítás általában is lehetséges, és az észrevehető $(\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) = (\beta' + \delta') + (\beta'' + \delta'') = 360^\circ$ összefüggés is mindig fennáll. Ha ugyanis az 1076/II. megoldáshoz főzött megjegyzés eljárásával az (1a), (1b), ill. (2a), (2b) rendszerekből kiszámítjuk $\cos(\alpha + \gamma)$ -t, $\cos(\beta + \delta)$ -t, akkor egyrészt mindegyikre egyetlen értéket kapunk, másrészt ez a két érték egyenlő. Valóban, az egyenletpárokat négyzetre emelve és összeadva

$$\begin{aligned} a^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) + b^2 c^2 &= \\ &= \frac{1}{4}(a^2 - c^2)^2 - \frac{1}{2}(a^2 - c^2)(b^2 - d^2) + \frac{1}{4}(b^2 - d^2)^2 + 4t^2, \\ a^2 b^2 - 2abcd \cos(\beta + \delta) + c^2 d^2 &= \\ &= \frac{1}{4}(a^2 - c^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - c^2)(b^2 - d^2) + \frac{1}{4}(b^2 - d^2)^2 + 4t^2, \end{aligned}$$

és innen, csekély átalakítással

$$\begin{aligned} 8abcd \cos(\alpha + \gamma) &= 8abcd \cos(\beta + \delta) = 2(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (a^2 - c^2)^2 - \\ &\quad - (b^2 - d^2)^2 - 16t^2. \end{aligned}$$

Számadatainkkal $\cos(\alpha + \gamma) = \cos(\beta + \delta) = -7/18 \approx -0,3889$.

Most már az átlókra (1) és (2)-ből

$$\begin{aligned} f^2 &= 65 - 16 \cos \alpha = 45 - 36 \cos \gamma = \frac{1}{5}(301 \pm 16\sqrt{11}), \\ e^2 &= 10 - 6 \cos \beta = 100 - 96 \cos \delta = \frac{4}{97}(301 \mp 16\sqrt{11}), \end{aligned}$$

amiből $e_1 \approx 3,198$, $f_1 \approx 8,415$; $e_2 \approx 3,822$, $f_2 \approx 7,042$.

Innen (9) céljára

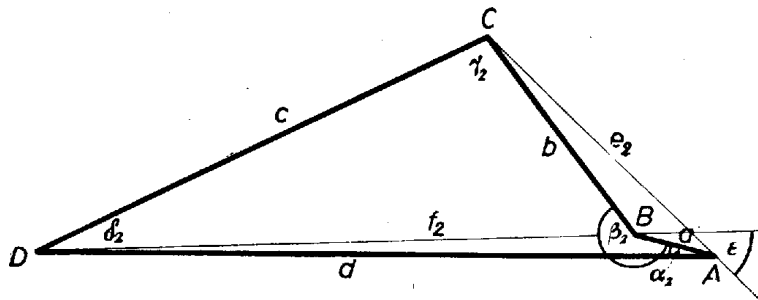
$$e^2 f^2 = \frac{4}{5 \cdot 97} (301^2 - 16^2 \cdot 11) = 4 \cdot 181,$$

és így $\sin \varepsilon = 10/\sqrt{181}$, amiből az átlók közti hegyes szög mindkét megoldásra $\varepsilon \approx 48,01^\circ$.

Eredményeinket összefoglalva

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1 \approx 111,30^\circ, & \beta_1 \approx 92,14^\circ, & \gamma_1 \approx 135,81^\circ, & \delta_1 \approx 20,74^\circ, & \varepsilon \approx 48,01^\circ; \\ \alpha_2 \approx 15,56^\circ, & \beta_2 \approx 219,93^\circ, & \gamma_2 \approx 97,32^\circ, & \delta_2 \approx 27,18^\circ, & \varepsilon \approx 48,01^\circ; \\ & e_1 \approx 3,198, & & f_1 \approx 8,415; & \\ & e_2 \approx 3,822, & & f_2 \approx 7,042. & \end{array}$$

A második megoldás B -nél homorú szögű négyszöget ad (2. ábra), az AC átló a négyszögon kívül fekszik, a négyszög területét az ACD és ACB háromszögek területének különbsége adja.



2. ábra

(2b) így is érvényes, ekkor ugyanis $\sin \beta$ negatív.

Dömötör Gyula (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

Nyárasdy Zsófia (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. IV. o. t.)

Nováky Béla (Budapest, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás. A négyszög területe egyenlő az ACB és ACD háromszögek területének összegével. Ez utóbbiakat a Heron-képlet felhasználásával az oldalakkal és az $AC = e$ átlóval kifejezve egyenletet kapunk e -re (4-gyel szoroztunk):

$$\begin{aligned} 4t &= \sqrt{(a+b+e)(a+b-e)(e+a-b)[e-(a-b)]} + \\ &+ \sqrt{(c+d+e)(c+d-e)(e+c-d)[e-(c-d)]} = \\ &= \sqrt{[(a+b)^2 - e^2][e^2 - (a-b)^2]} + \sqrt{[(c+d)^2 - e^2][e^2 - (c-d)^2]}. \end{aligned}$$

Az egyik gyökös kifejezést különválasztva négyzetre emelés után e^4 kiesik, és csak egy gyökös kifejezés marad az egyenletben. Ismét különválasztással négyzetre emelés után e^2 -re másodfokú egyenletet kapunk. – A számadatokkal

$$\begin{aligned} \sqrt{(16-e^2)(e^2-4)} + \sqrt{(196-e^2)(e^2-4)} &= 40, \\ -e^4 + 200e^2 - 784 &= 1600 - 80\sqrt{(16-e^2)(e^2-4)} - e^4 + 20e^2 - 64, \\ 4\sqrt{(16-e^2)(e^2-4)} &= 116 - 9e^2, \\ -16e^4 + 320e^2 - 1024 &= 13456 - 2088e^2 + 81e^4, \\ 97e^4 - 2408e^2 + 14480 &= 0, \end{aligned}$$

amiből a fenti értékek adódnak.

Hasonlóan számítva f -et, a szögek a részháromszögekből koszinusz tétellel számíthatók. Számíthatók az átlókkal kettévágott szögek részei is, pl. a BAC és DBA szögek és ezek összege a BMC szög. Csak azok az e, f összepárosítások megfelelőek, amelyekkel az ABD háromszögből számított BAD egyenlő az ABC és ADC -ből számított BAC és DAC szögek összegével, ill. különbségével.

Zalán Péter (Aszód, Petőfi S. g. III. o. t.)