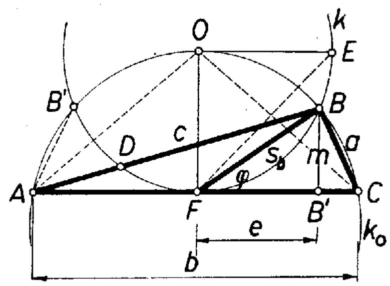
I. megoldás. 1. A szokásos jelölésekkel a feltétel $b=2\sqrt{ac}$, azaz $b^2=4ac$. Feltehetjük, hogy $a<c$, ugyanis $a=c$ mellett $b=2a=a+c$, vagyis a háromszög egyenlőtlenség nem teljesül. Legyen az AC oldal felezőpontja F, a B-ből húzott magasság talppontja B' – ekkor $BF=s_b$, $BB'=m$ –, a vizsgálandó hegyes szög $BFC\sphericalangle=\varphi$, végül $FB'=e$.



1. ábra

A $BB'A$, $BB'C$ és $BB'F$ derékszögű háromszögekből:

$$c^2=m^2+\left(\frac{b}{2}+e\right)^2, \tag{1}$$

$$a^2=m^2+\left(\frac{b}{2}-e\right)^2, \tag{2}$$

$$m^2+e^2=s_b^2. \tag{3}$$

Írjuk (3) felhasználásával (1) és (2)-t így:

$$c^2=\left(m^2+\frac{b^2}{4}+e^2\right)+be=\left(s_b^2+\frac{b^2}{4}\right)+be, \tag{1'}$$

$$a^2=\left(m^2+\frac{b^2}{4}+e^2\right)-be=\left(s_b^2+\frac{b^2}{4}\right)-be, \tag{2'}$$

és szorozzuk össze a megfelelő oldalakat:

$$c^2a^2=\frac{b^4}{16}=\left(s_b^2+\frac{b^2}{4}\right)^2-b^2e^2=s_b^4+\frac{b^4}{16}+\frac{b^2}{2}(s_b^2-2e^2),$$

$$\frac{b^2}{2}(e^2-m^2)=s_b^4. \tag{4}$$

A bal oldalnak pozitívnak kell lennie, tehát $e>m$. Így a $BB'F$ derékszögű háromszögben a BB' befogóval szemben levő φ szög a kisebb hegyes szög, s így $\varphi<45^\circ$. Ezt kellett bizonyítanunk.

2. Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor a B csúcs kívül van az AC átmérőjű körön, tehát $s_b>b/2$, továbbá a B' talppont az FC szakasz belsejében van, tehát $e<b/2$. Levonva (3)-ból (4)-nek $2/b^2$-szeresét, az első követelmény szerint

$$2m^2=s_b^2\left[1-2\Big(\frac{s_b}{b}\Big)^2\right]<s_b^2\left[1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{s_b^2}{2},$$

és így

$$m<\frac{s_b}{2},\qquad \sin\varphi=\frac{m}{s_b}<\frac{1}{2},\qquad \varphi=30^\circ.$$

Ahhoz, hogy φ-re alsó korlátot kapjunk, (4)-et átalakítjuk, beírva az $e=s_b\cos\varphi$, $m=s_b\sin\varphi$ összefüggést. Ekkor s_b^2-nel átosztva kapjuk, hogy

$$\frac{b^2}{2}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=\frac{b^2}{2}\cos 2\varphi=s_b^2. \tag{5}$$

Így az $e<b/2$ feltételből, felhasználva a $\cos^2\varphi=(1+\cos 2\varphi)/2$ összefüggést és (5)-öt

$$e^2=s_b^2\cos^2\varphi=\underline{\frac{s_b^2}{2}(1+\cos 2\varphi)<}\frac{b^2}{4}=\underline{\frac{s_b^2}{2\cos 2\varphi}}.$$

Innen az aláhúzott részben egyszerűsítéssel és a pozitív $\cos 2\varphi$-vel átszorozva az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$$\cos^2 2\varphi+\cos 2\varphi-1<0.$$

A bal oldal akkor válik 0-vá, ha $2\cos 2\varphi = -1 \pm \sqrt{5}$, ennek alapján a bal oldalt szorzattá alakítva

$$\left(\cos 2\varphi + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) < 0,$$

végül mivel az első tényező pozitív:

$$\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 0, \qquad \cos 2\varphi < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}6180,$$

azért $2\varphi > 51{,}8^\circ$, és $\varphi > 25{,}9^\circ$.

Ezek szerint a feltételt teljesítő hegyesszögű háromszögben $25{,}9^\circ < \varphi < 30^\circ$.

Szidarovszky Ágnes (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. III. o. t.)

II. megoldás. *(a feladat* 1. *részére).* Tekintsük azt a k kört, amely átmegy B-n és az AC oldalt F-ben érinti (1. ábra). Legyen k középpontja O, AB-vel való második metszéspontja D. Ekkor egyrészt a kör szelőjére és érintőjére vonatkozó tétel, másrészt a feltevés alapján

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = AF^2 = AD \cdot AB = CB \cdot AB,$$

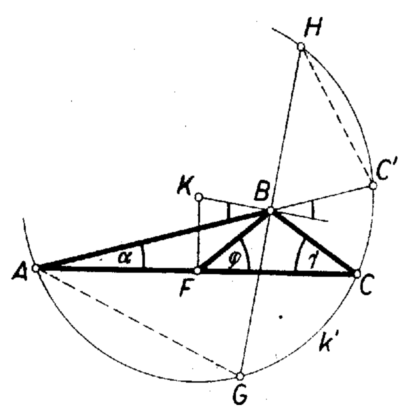
ennélfogva $AD = CB$. Legyen B tükörképe AC felező merőlegesére, vagyis FO-ra B', ekkor B' a k-n van, továbbá $AB' = CB = AD$. Nem lehet, hogy D egybeessék B'-vel, mert $DAC\sphericalangle = BAC\sphericalangle < BCA\sphericalangle = B'AC\sphericalangle$, ezért D és B' tükrös pár OA-ra. Így

$$DAC\sphericalangle = B'AC\sphericalangle = 2 \cdot OAC\sphericalangle = OAC\sphericalangle + OCA\sphericalangle = 180^\circ - AOC\sphericalangle, \quad \text{és}$$
$$DAC\sphericalangle + B'AC\sphericalangle = BAC\sphericalangle + BCA\sphericalangle = 180^\circ - ABC\sphericalangle,$$

vagyis $AOC\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Ezért AC az ugyanazon oldalán levő O és B pontokból ugyanakkora szögben látszik, tehát O rajta van az ABC háromszög k_0 körülírt körén. A szimmetria miatt O a k_0 kör AOC ívének AC-től legtávolabbi pontja, tehát B közelebb van AC-hoz, mint O. Megrajzolva k-nak FC-vel párhuzamos és egyirányú OE sugarát, az FB ív kisebb az FE negyedkörívnél, és így az ezeken fekvő $BFC\sphericalangle = \varphi$ és $EFC\sphericalangle = 45^\circ$ kerületi szögekre $\varphi < 45^\circ$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)

III. megoldás. *(a feladat* 1. *részére).* Mérjük rá a BC szakaszt az AB oldal B-n túli meghosszabbítására, legyen a végpont C'. Rajzoljuk meg az ACC' háromszög körülírt körét, legyen ez k' és a középpontja K, továbbá k'-nek B-n átmenő, KB-re merőleges GH húrját (2. ábra).



2. ábra

Így B felezi a GH húrt, továbbá az ABG és HBC' háromszögek hasonlók, mert szögeik egyenlők. Ezért $BA : BG = BH : BC'$. Felhasználva ezt, C' szerkesztését és a feltevést, nyerjük:

$$BG^2 = BG \cdot BH = BA \cdot BC' = BA \cdot BC = AF^2.$$

Innen $BG = AF$, tehát $GH = AC$, és mivel egyenlő hosszú húrok egyenlő távolságra vannak a középponttól, azért $KB = KF$. Így a KBF háromszög egyenlő szárú, és $KBF\sphericalangle = KFB\sphericalangle = 90^\circ - \varphi$.

A BCC' háromszög egyenlő szárú és K rajta van a tengelyén, ezért a KB egyenes felezi a $CBC'\sphericalangle = \alpha + \gamma$ szöget. Így

$$ABF\sphericalangle = KBF\sphericalangle - KBA\sphericalangle = 90^\circ - \varphi - \frac{\alpha+\gamma}{2}, \quad \text{és}$$

$$\varphi = BFC\sphericalangle = FAB\sphericalangle + ABF\sphericalangle = \alpha + 90^\circ - \varphi - \frac{\alpha+\gamma}{2}, \quad \text{tehát}$$

$$2\varphi = 90^\circ - \frac{\gamma-\alpha}{2} < 90^\circ, \quad \text{és} \quad \varphi < 45^\circ.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szegő Károly (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az utolsó lépésből hegyes szögű háromszög esetén φ-re a következő becslés is adódik:

$$2\varphi = 90^\circ - \frac{\gamma-\alpha}{2} = \frac{2\alpha+\beta}{2} > \frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{90^\circ}{2}, \quad \varphi > 22{,}5^\circ.$$

Ez valamivel rosszabb, mint amit az I. megoldásban kaptunk.