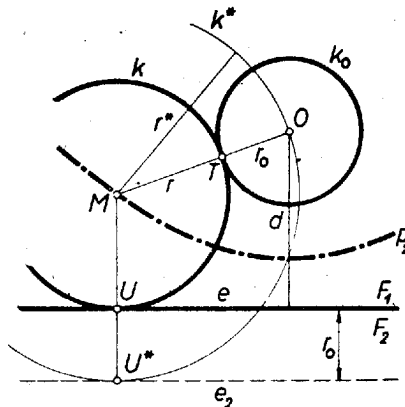


Jelöljük az adott egyenest e -vel, az adott kört k_0 -lal, középpontját O -val, sugarát r_0 -lal, és legyen egy a k_0 -t és e -t érintő kör k , középpontja M , sugara r , érintkezési pontja k_0 -lal T , e -vel U . Tekintsük az M középpont körül $MO = r^*$ sugárral írt k^* kört. Fel fogjuk használni, hogy k^* érinti az e két oldalán, tőle r_0 távolságban húzott párhuzamosok egyikét. Állításunkat e és k_0 kölcsönös helyzete, valamint k és k_0 külső vagy belső érintkezése szerint külön-külön bizonyítjuk.

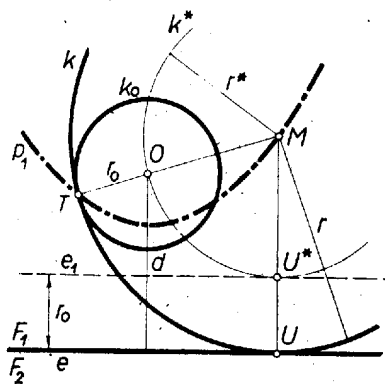
I. Legyen O -nak e -től való d távolsága nagyobb, mint r_0 . Ekkor k_0 minden pontja az e -vel kettévágott sík egyik félélsíkján van. Legyen ez F_1 , a másik félélsík pedig F_2 . Az érintés miatt k csak az F_1 félélsíkban lehet.



1. ábra

a) Ha k és k_0 kívülről érintik egymást (1. ábra), akkor $r^* = MO = MT + TO = r + r_0 > r$. Így k^* átnyúlik F_2 -be, az MU félegyenesen levő U^* pontja az F_2 -ben van, e -től $UU^* = MU^* - MU = r^* - r = r_0$ távolságban. Ezért a k^* -ot U^* -ban érintő egyenes azonos az F_2 -ben, e -től r_0 távolságban húzott e_2 párhuzamos egyenessel. Eszerint M egyenlő távolságban van O -tól és e_2 től, így csak azon p_2 parabolán lehet, melynek fókusza O , és irányvonala e_2 . E parabola minden pontja F_1 -en van és k_0 -on kívül, mert O -nak e_2 -től való távolsága $d + r_0 > 2r_0$, és a parabola csúcsa e_2 -től is, O -tól is fele ekkora, vagyis r_0 -nál nagyobb távolságra van, márpedig a parabola pontjai közül a csúcs van legközelebb a fókuszhoz és az irányvonalhoz.

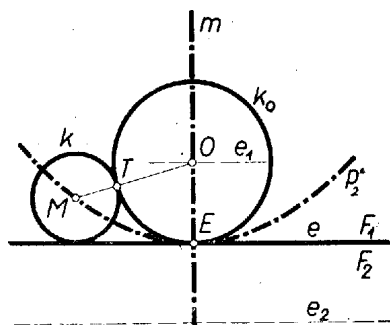
Fordítva, legyen M a p_2 egy pontja, e -n és e_2 -n levő vetülete U , ill. U^* , és a MO szakasznak k_0 -on levő pontja T . Így $MO = MU^*$, és $MT = MO - OT = MU^* - UU^* = MU$, ezért az M körül MT sugárral írt kör érinti k_0 -t és e -t, tehát M pontja a keresett mértani helynek.



2. ábra

b) Ha viszont k és k_0 belülről érintik egymást (2. ábra), akkor k magába foglalja k_0 -t, és így $r > r_0$, mert az ellentétes esetben k_0 belsejében volna e -beli pont, ti. U . Eszerint $MO = r^* = MT - OT = r - r_0$, és így k^* -nak az MU sugáron levő U^* pontja $r - r^* = r_0$ távolságra van e -től, és pedig azon a félélsíkon, mint M , vagyis F_1 -en. Tehát k^* az U^* -ban érinti az e -től r_0 távolságra levő e_1 egyenest. Ezekből a fentiekhez hasonlóan látjuk, hogy M azon a p_1 parabolán van, melynek fókusza M , irányvonala e_1 , továbbá hogy e parabola minden pontja a mértani helyhez tartozik.

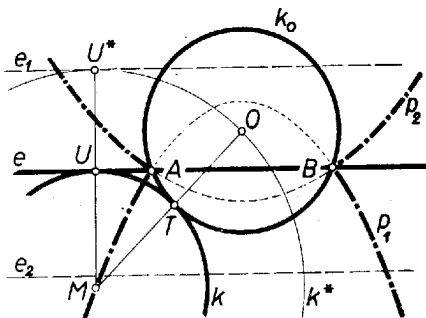
Ezek szerint, ha k_0 nem metszi e -t, akkor a keresett mértani helyet az a két parabola, p_1 és p_2 alkotja, melyek fókusza O , irányvonaluk pedig az e két oldalán r_0 távolságban húzott e_1, e_2 párhuzamosok.



3. ábra

II. Ha k_0 érinti e -t E -ben (3. ábra), akkor minden az e -t E -ben érintő kör megfelelő, tehát az e -re E -ben állított m merőleges része a mértani helynek. – Ha k nem E -ben érinti k_0 -t, akkor T és vele k is F_1 -en van, k_0 -t tartalmazó félsíkon. Továbbá E a k -n kívül van, ezért k és k_0 csak kívülről érinthetik egymást. Így **I. a)** meggondolásunk itt is érvényes, a mértani helyet m és p_2 alkotja, az E pont kivételével (E egybeesik p_2 csúcsával. m a p_1 parabola elfajulásának tekinthető, mert e_1 átmegy O -n.)

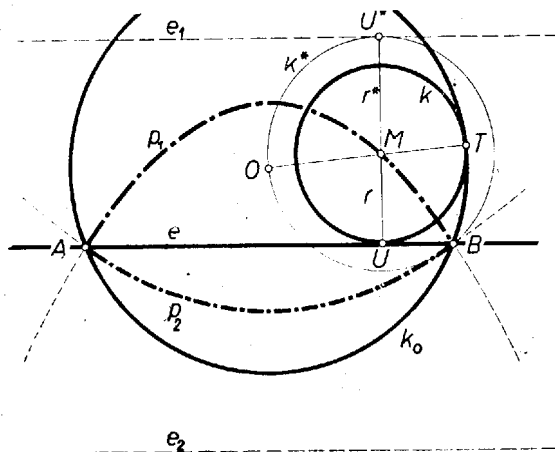
III. Ha k_0 és e metszik egymást A és B -ben, akkor k és M mindkét félsíkon lehet.



4. ábra

a) k és k_0 külső érintkezése esetén (4. ábra) $MO = r^* = r + r_0 > r$, ezért U^* a k -t nem tartalmazó félsíkon van, mindenesetre e_1 és e_2 valamelyikén, tehát M a p_1 és p_2 valamelyikének pontja. De itt p_1 és p_2 -nek csak a k_0 -on kívüli pontjai jönnek tekintetbe. Mivel A és B mindkét parabolán rajta van, hiszen O , e_1 , e_2 -től való távolságuk r_0 , azért a parabolák metszik k_0 -t, és így AB ívük itt nem jön tekintetbe.

Látni fogjuk viszont, hogy k és k_0 belső érintkezése esetén M számára csak p_1 és p_2 -nek AB íve jön tekintetbe. Ilyenkor ugyanis k_0 magába foglalja k -t (5. ábra), mert az ellentétes esetben k -nak e mindkét oldalán volna pontja, ami lehetetlen.



5. ábra

Így M benne van k_0 -ban, és $MO = r^* = TO - TM = r_0 - r$. Ekkor k^* -nak az az U^* pontja van e_1 , vagy e_2 -n, amelyet az MU sugár M -en túli meghosszabbítása metsz ki, mert erre $UU^* = UM + MU^* = r + (r_0 - r) = r_0$. Eszerint itt M gyanánt valóban csak a p_1 vagy p_2 -n, egyszersmind k_0 belsejében levő pontok szerepelhetnek.

A fentiekhez hasonlóan lehet megmutatni, hogy A és B kivételével p_1 és p_2 minden M pontjához tartozik a követelményeknek megfelelő kör; A és B -höz 0-sugarú, csak tágabb értelemben vett kör tartozik. Ezek szerint a mértani helyet itt is p_1 és p_2 alkotja, A és B kivételével.

Marton Dénes (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldások zöme koordináta geometriai úton kapta a mértani helyet. *Bollobás Béla* (Bp., Apáczai Csere J. g.) és *Gálfi László* (Bp., I. István g.) térbeli, kúpok érintkezését felhasználó megoldást is adtak.