

Megmutatjuk, hogy ha s, d, p, q valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymás utáni négy tagja, akkor s és d között nem állhat sem egy, sem két tag, másrészt hogy p és q között nem állhat két tag.

Tegyük fel, hogy s és d között egy tagja van a sorozatnak. Ez vagy p , vagy q , mindenesetre egyenlő $s = u + v$ és $d = u - v$ számtani közepével, u -val. Ha a közbülső tag p , vagyis $p = uv = u$, ebből $u(v - 1) = 0$, tehát az α) $u = 0$ és β) $v = 1$ egyenlőségeknek legalább egyike teljesül. Az α) esetben $p = uv = 0$, $q = u/v = 0$, a sorozatban két egyenlő tag lép fel, így a sorozat különbsége 0, tehát $s = d$ is fennáll. Márpedig $u + v = u - v$ -ből $v = 0$, és így q -nak nincs értelme. – A β) esetben hasonlóan $p = q (= u)$ -ból $s = d$ adódik. – Ugyanezekre az eredményekre vezet az a feltevés is, hogy s és d között q áll, vagyis hogy $u/v = u$.

Ha pedig s és d mindegyike szélső, vagy ha mindegyikük közbülső tagja a sorozatnak, akkor $p + q = s + d$. (Ha ugyanis a_1, a_2, a_3, a_4 egy D különbségű számtani sorozat egymás utáni négy tagja, akkor $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = 2a_1 + 3D$.) Ebből

$$p + q - (s + d) = uv + \frac{u}{v} - 2u = \frac{u}{v} - 2u = \frac{u}{v}(v^2 - 2v + 1) = \frac{u}{v}(v - 1)^2 = 0,$$

tehát ez a feltevés is a fenti ellentmondásba torkollik. – Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Ha mármost $d = u - v$ és $s = u + v$ a sorozat szomszédos tagjai, akkor a sorozat D különbségére vagy $D = 2v$, vagy $D = -2v$. És mivel p és q vagy d és s utáni tagjai a sorozatnak, vagy mindegyikük megelőzi s és d -t, azért p és q valamilyen sorrendben vagy az $u + 3v$, $u + 5v$, vagy az $u - 3v$, $u - 5v$ számpárok tagjaival egyenlők. Ez $2 \cdot 2 = 4$ egyenletrendszerre vezet. A

$$p = uv = u + 3v \qquad q = \frac{u}{v} = u + 5v$$

rendszerből

$$u = \frac{3v}{v - 1} = \frac{5v}{\frac{1}{v} - 1},$$

és mivel $v \neq 0$, és a fentiek szerint $v \neq 1$, azért $v = -3/5$, $u = 9/8$. Az ezekből képezett (1)

$$d = u - v = \frac{69}{40}, \quad s = u + v = \frac{21}{40}, \quad p = uv = -\frac{27}{40}, \quad q = \frac{u}{v} = -\frac{15}{8} = -\frac{75}{40}$$

számok valóban számtani sorozatot alkotnak.

A hátralevő három egyenletrendszer megoldásának megkönnyítése végett oldjuk meg közös típusukat, az

$$uv = u + Av, \qquad \frac{u}{v} = u + Bv$$

paraméteres egyenletrendszert. Ugyanis ebben (A, B) helyére egymás után a $(+5, +3)$, a $(-3, -5)$ és a $(-5, -3)$ értékpárokat írva a további egyenletrendszereket kapjuk, a $(+3, +5)$ értékpárral pedig a már megoldott esetet kapnánk. Ahhoz hasonlóan

$$u = \frac{Av}{v - 1} = \frac{Bv}{\frac{1}{v} - 1} = -\frac{Bv^2}{v - 1} \text{ből}$$

$$v = -\frac{A}{B}, \qquad u = \frac{A^2}{A + B},$$

és rendre a következő sorozatokat kapjuk:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & u = \frac{25}{8}, \quad v = -\frac{5}{3} \text{ből } d, s, q, p = \frac{115}{24}, \frac{35}{24}, -\frac{45}{24}, -\frac{125}{24}; \\ \text{(III)} \quad & u = -\frac{9}{8}, \quad v = -\frac{3}{5} \text{ből } q, p, d, s = \frac{75}{40}, \frac{27}{40}, -\frac{21}{40}, -\frac{69}{40}; \\ \text{(IV)} \quad & u = -\frac{25}{8}, \quad v = -\frac{5}{3} \text{ből } p, q, d, s = \frac{125}{24}, \frac{45}{24}, -\frac{35}{24}, -\frac{115}{24}. \end{aligned}$$

Fritsch István (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az I, III és a II, IV megoldás-pár (-1) -gyel való szorzással és a sorrend megfordításával egymásba megy át. A numerikus számítás végrehajtása nélkül is belátható, hogy ha az u, v számpárból képezett s, d, p, q valamilyen sorrendben véve számtani sorozatot ad, akkor a $-u, v$ számpárból képezett d', s', p', q' számok a megfelelő sorrendben ugyancsak számtani sorozat tagjai. Ezek ugyanis amazokból (-1) -gyel való szorzással keletkeznek, pl. $d' = -u - v = -(u + v) = -s$, márpedig egy számtani sorozat tagjait (-1) -gyel szorozva ismét számtani sorozatot kapunk.

Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. g. III. o. t)