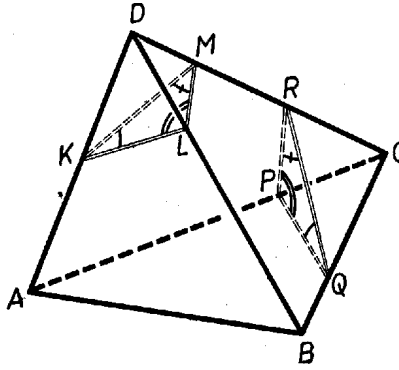


I. megoldás. A hasonlóság úgy áll fenn, hogy P, Q, R rendre L, K, M -nek felel meg.



Ennek bizonyítására a megfelelő oldalak arányának egyenlőségét fogjuk megmutatni:

$$(1) \quad PR : QR = LM : KM \quad \text{és}$$

$$(2) \quad PR : PQ = LM : LK.$$

A 615. gyakorlatban¹ segédtevéként bebizonyítottuk (könnyen következik abból, hogy $ABLK, BCML, CAKM$ húrnégyszög), hogy

$$(3) \quad DKL\Delta \sim DBA\Delta,$$

$$(4) \quad DLM\Delta \sim DCB\Delta,$$

$$(5) \quad DMK\Delta \sim DAC\Delta,$$

úgy, hogy a csúcspárok a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak. Ezeknek a kapcsolatoknak a G_2 -vel létrejött és a G_1 -étől csak jelölésben különböző pontrendszerben a következők felelnek meg:

$$(6) \quad CPQ\Delta \sim CBA\Delta,$$

$$(7) \quad CQR\Delta \sim CDB\Delta,$$

$$(8) \quad CRP\Delta \sim CAD\Delta.$$

Mivel (4) és (7), továbbá (5) és (8) jobb oldalán ugyanaz a háromszög áll, azért

$$(9) \quad CQR\Delta \sim LDM\Delta,$$

$$(10) \quad CRP\Delta \sim KMD\Delta.$$

Mármost (10) és (9)-ből

$$\frac{PR}{RC} = \frac{DM}{MK}, \quad \frac{RC}{QR} = \frac{ML}{DM},$$

és ezek összeszorozásával egyszerűsítés után (1) adódik.

Hasonlóan a rendre (8), (6), (9), (3)-on alapuló

$$\frac{PR}{RC} = \frac{DA}{AC}, \quad \frac{CQ}{PQ} = \frac{AC}{BA},$$

$$\frac{CR}{QC} = \frac{LM}{DL}, \quad \frac{DA}{AB} = \frac{DL}{LK}$$

egyenlőségek szorzata egyszerűsítés után (2)-t adja.

Huber Tibor (Budapest, Kossuth L. gép. t. III. o. t.)

II. megoldás. A KLM háromszög alakjáról többet is mondhatunk, sőt kevesebb hasonló háromszög-pár felhasználásával. KLM oldalainak aránya független G_1 helyzetétől, kifejezhető az $ABCD$ tetraéder 6 élével:

$$(11) \quad KL : LM : MK = AB \cdot CD : BC \cdot AD : CA \cdot BD,$$

Ugyanis (3) és (4), valamint (4) és (5)-ből

$$\frac{KL}{LD} = \frac{BA}{AD} \quad \text{és} \quad \frac{LD}{LM} = \frac{CD}{CB} \quad \text{ill.} \quad \frac{LM}{MD} = \frac{CB}{BD} \quad \text{és} \quad \frac{MD}{MK} = \frac{AD}{AC},$$

¹ Lásd a megoldást K. M. L. 21(1960) 199: o.

és a két-két egyenlőség szorzásával (11) első, illetőleg második aránypárját kapjuk. Eredményünk így is írható:

$$(12) \quad KL = \lambda \cdot AB \cdot CD, \quad LM = \lambda \cdot BC \cdot AD, \quad MK = \lambda \cdot CA \cdot BD,$$

vagyis a D -ben összefutó lapokat oldallapoknak, ABC oldalait pedig alapéleknek nevezve KLM oldalai arányosak a velük egy oldallapon levő alapélnek és az evvel szemben levő oldalélnek szorzatával.

Mármost A, B, C, D helyére rendre B, A, D, C -t írva K, L, M helyére CB -n Q, CA -n P és CD -n R lép, és (11) így alakul:

$$(13) \quad QP : PR : RQ = BA \cdot DC : AD \cdot BC : DB \cdot AC,$$

és itt a szorzatok rendre egyenlők a (11)-beliekkel, tehát $QPR\triangle \sim KLM\triangle$.

Kardeván Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Megmutatjuk, hogy $QRP\triangleleft = KML\triangleleft$; ez (1)-gyel összekapcsolva bizonyítja az állítást. (9) és (10) szerint

$$QRC\triangleleft = DML\triangleleft = LMD\triangleleft, \quad \text{ill.} \quad PRC\triangleleft = DMK\triangleleft = KMD\triangleleft,$$

vagyis az RQ és ML egyenesek a CDB síkban, RP és MK egyenesek a CDA síkban tükrös párok az RM szakasz felező merőlegesére (az $R \equiv M$ lehetőségre gondolva így is mondhatjuk: a CD -re az RM felezőpontjában állított merőlegesre). Eszerint, ha a QRP szöget tükrözzük az RM szakasz felezőpontjában a CD -re merőlegesen álló síkra, tükrörképe az $LMK = KML$ szög, és így egyenlő is vele. Ezt akartuk bizonyítani.

Az említett tükrösség G_1, G_2 minden helyzetében fennáll, mert a 615. gyakorlat megoldásából azt is látjuk, hogy G_1 helyén egy G' gömbbel a KLM és $K'L'M'$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak.

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)