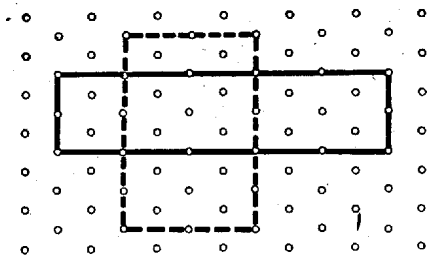


¹ **I. megoldás.** A háromszögrács két szomszédos szabályos háromszöge 60° -os hegyes szögű rombuszt alkot d és $d\sqrt{3}$ hosszú átlókkal, melyek egymásra merőlegesek. Tehát a rács minden olyan rácsegyeneséhez², melyen a rácsponatok távolsága d , van rá merőleges rácsegyenes is, és ezen a rácsállandó $d\sqrt{3}$. Minden d és $d\sqrt{3}$ oldalú rács téglalap belsejében egy rácspon van, a középpont.



Legyen az elhatárolt téglalap két oldala bd és $cd\sqrt{3}$, ahol b és c természetes szám. Így az oldalakon b , c , b , c számú fa áll (a körüljárásban mindegyik oldalhoz a kezdőpontot hozzászámítva, a végpontot nem), összesen $2(b+c)$ fa. A határmenti rácsponatok szemközti párait összekötő egyenesek az erdőrészletet bc számú, d , $d\sqrt{3}$ oldalú téglalapra bontják, mindegyik közepén áll egy fa, és az egyenesek $(b-1)(c-1)$ számú belső metszéspontján egy-egy fa. Ezzel valamennyi belső fát számításba vettünk, számuk $bc + (b-1)(c-1)$. A kérdés tehát ez: van-e olyan b , c természetes számpár, amelyre

$$(1) \quad 2(b+c) = bc + (b-1)(c-1).$$

Innen

$$b = \frac{3c-1}{2c-3} = 1 + \frac{c+2}{2c-3}.$$

Mivel $c+2$ pozitív, azért $2c-3$ is, tehát $c > 3/2$, és mivel c egész, így $c \geq 2$. Másrészt a jobb oldal második tagjára

$$\frac{c+2}{2c-3} = \frac{1}{2} \left(\frac{2c+4}{2c-3} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{7}{2c-3} \right).$$

Az utolsó zárójelben a második tagnak páratlan egész számnak kell lennie. Ez 1-nél nagyobb egész c -re csak úgy lehet, ha a nevező 1 vagy 7. Innen $c_1 = 2$ és $c_2 = 5$, $b_1 = 5$ és $b_2 = 2$, tehát a követelmény teljesíthető.

A két megoldás alakra különböző, de egyenlő területű erdőrészletet ad, ugyanis a hosszabb oldal $5 : 2\sqrt{3} \approx 1,44$ -szor, ill. $5\sqrt{3} : 2 \approx 4,33$ -szor akkora, mint a rövidebb, a terület viszont mindkétszer $bcd^2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}d^2$. (Az ábrából látjuk, hogy egyik oldaluk mentén nyújtva egymásba átvihetők.)

Seprődi László (Budapest, Fáy A. g. III. o. t.)

II. megoldás. Ha (1) szimmetriáját feláldozva $c = b + e$ -t írunk (ahol e egész), b -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$(2) \quad 2b^2 + 2(e-3)b + (1-3e) = 0.$$

Innen b csak akkor racionális, ha a diszkrimináns teljes négyzet:

$$4(e-3)^2 - 8(1-3e) = 4(e^2 + 7),$$

tehát ha $e^2 + 7 = f^2$, ahol f egész. Így $f^2 - e^2 = (f-e)(f+e) = 7$, tehát $f-e = 7/(f+e)$, és az I. megoldáshoz hasonlóan $e = \pm 3$ és $|f| = 4$. Most már e két értékével (2)-ből pozitív megoldásként ismét a b , $c = 2, 5$ értékpár adódik.

Benczúr András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) összefüggést tagokra bontva, 0-ra redukálva, majd 2-vel szorozva az ismeretleneket tartalmazó tagokat szorzatba foglalhatjuk össze:

$$\begin{aligned} 2bc - 3b - 3c + 1 &= 0, \\ 4bc - 6b - 6c + 2 &= 2b(2c-3) - 3(2c-3) - 7 = 0, \\ (2b-3)(2c-3) &= 7. \end{aligned}$$

Ebből az I. megoldáshoz hasonlóan következtethetünk tovább.

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

¹ Az eredeti kitűzés zárójeles megjegyzését töröltük. – Szerk.

² Rácsegyenes minden olyan egyenes, amely két (és akkor már végtelen sok) rácsponon megy át.

2. Többen abból indultak ki, hogy „kicsi” rács téglalap belsejében kevesebb a rácspont, mint a kerületén, „nagy” téglalapnál viszont benn van többlet. Megfigyelték ezután a belső rácspontszám növekedését, ha az egyik oldalt növeljük, és így eljutottak egyik, esetleg mindkét megoldáshoz. Dolgozatukból azonban nem derül ki, hogy van-e további megoldás. A feladat kérdésére ezek is igennel válaszoltak, tehát megoldásuk helyes. Ezeket a dolgozatokat 2 pontra értékeltük.

3. Az eredeti kitűzés zárójeles megjegyzésében az $ABC\triangle$ -et szabályosnak kellett gondolnunk. Rögzített A és B -vel $AB = d$ mellett végtelen sok olyan C van, hogy az $ABC\triangle$ -ben nincs további fa. Mindezekben a C -ből húzott magasság $d\sqrt{3}/2$.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. IV. o. t.)