

a) Legyenek a feladat feltételeit kielégítő számok, ha vannak ilyenek, $\overline{abc}$, $\overline{def}$, $\overline{ghi}$. Összefüggésüket részletesen kiírva, majd átalakítva

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & i \end{array} j$$

$$\begin{aligned} (100a + 10b + c) + (100d + 10e + f) &= \\ &= 1000g + 100h + 10i + j, \\ (a + b + c + d + e + f) - (g + h + i + j) &= \\ &= 999g + 99(h - a - d) + 9(i - b - e) = 9A, \end{aligned}$$

ahol A egész szám. Másrészt valamennyi számjegy összege

$$(a + b + c + d + e + f) + (g + h + i + j) = 0 + 1 + \dots + 9 = 45 = 9 \cdot 5.$$

E két egyenletből a négyjegyű szám számjegyeinek összege

$$s = g + h + i + j = \frac{9(5 - A)}{2},$$

osztható 9-cel, mert a bal oldallal együtt a jobb is egész szám, és $5 - A$ osztható 2-vel, mert ha páratlan volna, akkora 9-szerese sem lehetne osztható 2-vel. Így pedig az ismert oszthatósági ismertetőjel szerint a $\overline{ghi}j$ szám maga is osztható 9-cel.

b) Megmutatjuk, hogy léteznek a feladatnak megfelelő számok. g értéke csak 1 lehet, mert két háromjegyű szám összege kisebb 2000-nél. Így s nem nagyobb $1 + 9 + 8 + 7 = 25$ -nél, másrészt pozitív, tehát értéke 9, vagy 18. Próbálkozzunk $s = 9$ -cel. Így h, i, j -t vagy a 0, 2, 6, vagy a 0, 3, 5 számhármast adja meg.

Véve a 0, 2, 6 hármast a hátralevő jegyekből bármelyik kettőnek az összege legalább akkora, mint $3 + 4 = 7$, tehát (1)-ben az összeadandók bármelyik két jegyének az összege nagyobb az összeg mindegyik jegyénél. Ezért az összeadásban minden oszlop maradékot visz a következő oszlopba. Így pl. $j = 6$ csak $7 + 9 = 16$ -ból adódhat. Ezért pl. $i = 2$ -höz $b + e = 11$, ami a még nem használt jegyekből $3 + 8$ -cal kiadódik. Most már $h = 0$, így $a + d = 9$, és éppen ennyi a hátralevő 4 és 5 összege, tehát pl.

$$437 + 589 = 1026$$

egy megoldása a feladatnak. Ha pedig j, i, h -t 2, 6, 0-nak próbáljuk, hasonlóan kapjuk a $473 + 589 = 1062$ megoldást. (Az oszlopok kisebb jegyét mindig az első háromjegyűbe írtuk; a három oszlopon belüli, egymástól független cseréket elvégezve mindegyik megoldás $2^3 = 8$ megfelelő összeállítást jelent. Mivel minden oszlopban vittünk át maradékot, azért mindkét példában a tízes és százasként is a maga egészében megcserélhető.)

Hauptert János (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)

Megjegyzés. A dolgozatok még a következő összeállításokat találták:

246	264	432	324
<u>789</u>	<u>789</u>	<u>657</u>	<u>765</u>
1035	1053	1089	1089

Ezekben is lehetséges oszlopcseré, egyrészt a tízes oszlop, másrészt a százasként ill. egyes oszlop között.