

A gyökképlet alapján

$$x_{1,2} = \frac{4n^2 \pm \sqrt{16n^4 - 4n^2(4n^2 - 1)}}{2(4n^2 - 1)} = \frac{n(2n \pm 1)}{(2n - 1)(2n + 1)},$$

és így

$$x_1 = \frac{n}{2n + 1}, \quad x_2 = \frac{n}{2n - 1}.$$

Ha $n \neq 0$ és egész, e hányadosok nem egyszerűsíthetők, mert n mindkét nevezőhöz relatív prím.¹

Véges tizedes törtként csak azok a törtek írhatók fel, amelyeknek tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevezőt törzsszámhatványok szorzataként írva benne csak 2 és 5 hatványai lépnek fel. Itt $2n + 1$ és $2n - 1$ páratlanok, ezért x_1 és x_2 mindegyike csak akkor lenne véges tizedes tört, ha $2n + 1$ és $2n - 1$ az 5 valamely (nem negatív egész kitevőjű) hatványa lenne, esetleg mínusz előjellel ellátva. 5 hatványai (pozitív kitevő esetén) 5-nek többszörösei, tehát két ilyen különbsége (bármilyen előjelpár esetén) szintén, márpedig $(2n + 1) - (2n - 1) = 2$. Az sem lehet, hogy a nevezők egyike $+1$, vagy -1 legyen, másika pedig 5^k , ahol $k > 0$, mert $\pm 5^k$ és ± 1 különbsége 4-re vagy 6-ra végződik. Végül a $2n - 1 = -1$ és $2n + 1 = +1$ feltevés a kizárt $n = 0$ esetre vezet. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szilvási Márta (Budapest, Ságvári E. lg. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az állítást a gyökök felírása nélkül is bebizonyíthatjuk. Ha x_1 és x_2 véges tizedes törtek volnának, akkor összegük, $4n^2/(4n^2 - 1)$ is az lenne. Ez a tört sem egyszerűsíthető, mert szomszédos számok relatív prímei. A nevező a kizárt $n = 0$ eset kivételével pozitív, továbbá páratlan és nem lehet 5^k -nal egyenlő $k > 0$ mellett, mert így $k = 1$ esetén 5-tel egyenlő, $k > 1$ mellett 25-re végződne, így pedig $4n^2$ egyenlő lenne 6-tal, ill. végződése 26 lenne, ami nem osztható 4-gyel. Hasonlóan $4n^2 - 1 = 1$ -ből $4n^2 = 2$ -re jutnánk.

Az sem lehetséges, hogy $x_1 x_2 = n^2/(4n^2 - 1)$ véges tizedes tört legyen, ez pedig szükséges lenne ahhoz, hogy x_1 és x_2 mindegyike véges tizedes tört legyen.

Homitsky Lajos (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

¹Ugyanis a B/A tört csak B és A közös osztóival egyszerűsíthető, és ha az A és B (egész) számoknak a d (egész) szám közös osztója, vagyis $A = d \cdot A'$ és $B = d \cdot B'$ (ahol A', B' egész), akkor d az $A - 2B = d(A' - 2B')$ számnak is osztója. Már most $A = 2n \pm 1$ és $B = n$ -nel $A - 2B = \pm 1$, eszerint A és B -nek csak $+1$ és -1 közös osztója.