Előkészítésül mind a négy egyenlőtlenséget külön oldjuk meg, 0-ra redukáljuk és $2x$ függvényeit x függvényeivel kifejezve a bal oldalt tényezőkre bontjuk.

I. $\sin 2x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) > 0$

akkor és csak akkor teljesül, ha a két tényező egyenlő előjelű. Az első tényező akkor pozitív, ha $0^\circ < x < 180^\circ$, a második akkor, ha $\cos x > 1/2$, azaz vagy $0^\circ \leqq x < 60^\circ$, vagy $300^\circ < x \leqq 360^\circ$, eszerint mindkét tényező a mindkét feltételt teljesítő $0^\circ < x < 60^\circ$ intervallumban pozitív. Hasonlóan mindkettő negatív a $\cos x < 1/2$-nek megfelelő $60^\circ < x < 300^\circ$, és a $180^\circ < x < 360^\circ$ intervallumok közös részében, azaz ha $180^\circ < x < 300^\circ$.

II. A $\cos 2x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1 = (2\cos x + 1)(\cos x - 1)$ kifejezés második tényezője nem lehet pozitív, így a kifejezés csak akkor lehet pozitív, ha $2\cos x + 1 < 0$, vagyis $\cos x < -1/2$; azaz $120^\circ < x < 240^\circ$ esetén.

III. $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x\left(\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x} - 1\right) = \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}(1+\operatorname{tg}^2 x) > 0$

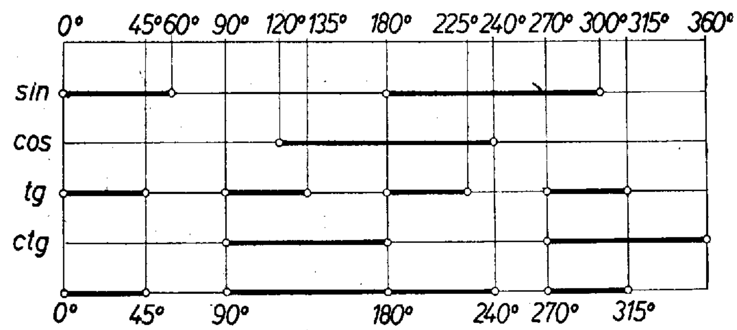
nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha

$$z = \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} > 0.$$

Itt a nevező $\neq 0$, mert $\operatorname{tg} x = \pm 1$ esetén $x = k \cdot 45^\circ$, ahol $k = 1, 3, 5, 7$, így $2x = k \cdot 90^\circ$, tehát $\operatorname{tg} 2x$ nincs értelmezve. $0^\circ < x < 45^\circ$ esetén $z > 0$. A számláló előjelváltozása $90^\circ, 180^\circ$ és 270° átlépésénél áll be, a nevezőé pedig akkor, ha $\operatorname{tg} x$ abszolút értéke átlépi az 1 értéket, vagyis 45°, 135°, 225° és 315°-nál. Ezek a helyek különbözők, így z a 45° minden többszörösének átlépésekor előjelet vált, ezért 2 átlépésenként visszanyeri korábbi előjelét. Ezért $z > 0$ akkor, ha folytatólag

$$90^\circ < x < 135^\circ, \quad 180^\circ < x < 225^\circ, \quad 270^\circ < 315^\circ.$$

IV. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} - \operatorname{ctg} x = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x + 1}{2\operatorname{ctg} x} > 0$, ha $\operatorname{ctg} x < 0$; vagyis ha $90^\circ < x < 180^\circ, 270^\circ < x < 360^\circ$.



A talált intervallumokat az ábra szemlélteti. Erről leolvasható, hogy két vagy három egyenlőtlenség áll, ha

$$0^\circ < x < 45^\circ, \quad 90^\circ < x < 180^\circ, \quad 180^\circ < x < 240^\circ, \quad 270^\circ < 315^\circ.$$

(A 2. és 3. intervallum szomszédos, de nem összefüggő, mert $x = 180^\circ$-ra csak a II. teljesül.) Egyetlen egyenlőtlenség sem teljesül, ha $60^\circ \leqq x < 90^\circ$, továbbá – az adott intervallumhoz bal végpontját is hozzátartozónak tekintve – ha $x = 0^\circ$.

Benczúr András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)