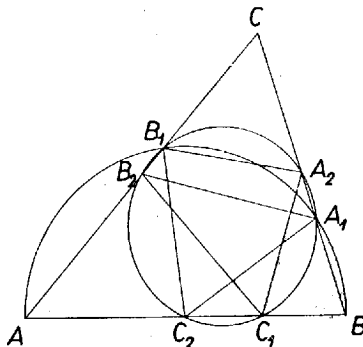


Előzetes megjegyzés. Feltesszük, hogy a kérdéses területek 0-tól különbözők. Ez csak akkor nem áll fenn, ha egy csúcs vetülete egybeesik egy másik csúccsal; ilyenkor a 2-ik csúcsnál derékszög van és a 3-ik csúcs vetülete is ide esik, ezért két terület értéke 0, az állítás érvényes, de semmitmondó, mert mindkét oldala 0. Pl. ha $A_1 \equiv C$, akkor $ACB \angle = 90^\circ$, $B_1 \equiv C$, ezért $t_{c1} = t_{c2} = 0$.



I. megoldás. B_1 az AB átmérő fölötti Thalész-körön van, amelynek középpontja C_2 , ezért $AB_1C_2\Delta$ egyenlő szárú. Ugyanez áll $AC_1B_2\Delta$ -re. E háromszögekben az alapon fekvő szögek egyike közös (a $BAC \angle$, vagy ha ez tompaszög, akkor a külső szöge), tehát a háromszögek hasonlóak. Száraik aránya – a szokásos jelölésekkel – $AC_2 : AB_2 = c : b$, ezért területeik aránya $c^2 : b^2$. Hasonló eredményt kapunk a további kérdéses háromszögeknek azokról a pájrjairól, melyekben a közös csúcs B , ill. C . Most már a

$$\frac{t_{a1}}{t_{a2}} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{t_{b1}}{t_{b2}} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{t_{c1}}{t_{c2}} = \frac{b^2}{a^2}$$

egyenlőségek összeszorozásával kapjuk, hogy az állításban szereplő két szorzat hányadosa 1, a szorzatok egyenlők. Ezt kellett bizonyítanunk.

Fodor János (Miskolc, Földes F. g. III. o. t.)

II. megoldás. Az AB_1C_2 és $CB_1A_2\Delta$ -ek AB_1 , ill. CB_1 oldalához tartozó magassága egyenlő (a BB_1 magasság fele), ezért területeik aránya egyenlő az alapok arányával. Ugyanezt a BC_1A_2 és AC_1B_2 , valamint a CA_1B_2 és BA_1C_2 háromszögpárokra felírva és az egyenlőségeket összeszorozva:

$$(1) \quad \frac{t_{a1}}{t_{c2}} \cdot \frac{t_{b1}}{t_{a2}} \cdot \frac{t_{c1}}{t_{b2}} = \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{CB_1}.$$

A B , C , B_1 , C_1 pontok húrnégyszöget határoznak meg, ezért a szögek egyenlősége alapján az $AB_1C_1\Delta$ hasonló $ABC\Delta$ -höz, tehát a jobb oldal első tényezője egyenlő $AB/AC = c/b$ -vel. Hasonlóan a további két tényező egyenlő $BC/BA = a/c$ -vel ill. $CA/CB = b/a$ -val, így a szorzat értékére ismét 1-et kapunk.

Kacsó András (Esztergom, Temesvári P. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 pontok az $ABC\Delta$ Feuerbach-körén vannak. Felírva e körre az A , B , C pontokból húzott szelők szorzatának egyenlőségét:

$$AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2, \quad BC_1 \cdot BC_2 = BA_1 \cdot BA_2, \quad CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$$

majd ezek szorzatát az $AB_2 = CB_2$, $BC_2 = AC_2$, $CA_2 = BA_2$ egyenlőségek alapján egyszerűsítve ismét kapjuk, hogy az (1) jobb oldalán álló számlálók szorzata egyenlő a nevezők szorzatával.

Kardeván Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

2. Az állítás minden olyan esetben igaz, amikor A_1 , B_1 , C_1 és A_2 , B_2 , C_2 rendre a BC , CA , AB oldalegyenes olyan pontjai, amelyekre egyrészt az AA_1 , BB_1 , CC_1 , másrészt az AA_2 , BB_2 , CC_2 egyenesek egy P_1 , ill. P_2 ponton mennek át. Ekkor ugyanis a Ceva-tétel¹ szerint, X , Y , Z helyén előbb A_1 , B_1 , C_1 -gyel, majd A_2 , B_2 , C_2 -vel

$$(ABC_i) \cdot (BCA_i) \cdot (CAB_i) = \frac{AC_i \cdot BA_i \cdot CB_i}{C_iB \cdot A_iC \cdot B_iA} = 1, \quad (i = 1, 2) \quad \text{tehát}$$

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1,$$

$$AC_2 \cdot BA_2 \cdot CB_2 = AB_2 \cdot BC_2 \cdot CA_2.$$

Ezeket összeszorozva, majd mindkét oldalt az α , β , γ szögek szinuszának feléből képezett szorzattal szorozva az egymás fölötti tényezőhármassok szorzatai rendre éppen az állításbeli területeket adják. – Esetünkben P_1 -nek az $ABC\Delta$ magasságpontja, P_2 -nek pedig a súlypontja felel meg.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

¹ Ha az $ABC\Delta$ BC , CA , AB oldalegyenesein rendre X , Y , Z olyan a Δ csúcsaitól különböző pontok, hogy az AX , BY , CZ egyenesek egy pontban találkoznak, akkor $(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = +1$, ahol (ABZ) az AZ és ZB irányított szakaszok hányadosát, a Z osztópontnak az A és B alappontokra vonatkozó ún. *osztóviszonyát* jelenti. Lásd pl. *Kárteszi Ferenc*: A Menelaos és a Ceva-féle tétel. K. M. L. 11 (1955) 67–75. o.