

a) Az egyenletrendszer megoldása: Az

$$x = \frac{x(x+y+z)}{x+y+z} = \frac{x^2}{x+y+z} + a$$

összefüggés alapján elegendő a jobb oldali első tagot kifejeznünk a, b, c segítségével. Az adott egyenletekből viszont az

$$r = \frac{yz}{x+y+z}, \quad s = \frac{zx}{x+y+z}, \quad t = \frac{xy}{x+y+z}$$

kifejezése remélhető, mert egyenleteink így írhatók:

$$\begin{aligned} (1') \quad & s + t = a, \\ (2') \quad & t + r = b, \\ (3') \quad & r + s = c. \end{aligned}$$

Innen

$$2(r+s+t) = a+b+c,$$

tehát

$$(4) \quad r = (r+s+t) - (s+t) = \frac{1}{2}(a+b+c) - a = \frac{1}{2}(-a+b+c),$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} (5) \quad & s = \frac{1}{2}(a-b+c), \\ (6) \quad & t = \frac{1}{2}(a+b-c). \end{aligned}$$

A keresett kifejezés r, s, t közt mostmár az

$$st = \frac{x^2 yz}{(x+y+z)^2} = \frac{x^2}{x+y+z} \cdot r$$

összefüggés áll fenn. Ebből

$$\frac{x^2}{x+y+z} = \frac{st}{r} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(-a+b+c)},$$

s így

$$(7) \quad x = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(-a+b+c)} + a = \frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{2(-a+b+c)}.$$

Hasonlóan – pl. $y/x = r/s, z/x = r/t$ felhasználásával

$$\begin{aligned} (8) \quad & y = \frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{2(a-b+c)}, \\ (9) \quad & z = \frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{2(a+b-c)}. \end{aligned}$$

Hallgatólag feltettük mindenek előtt, hogy az (1)–(3) egyenleteknek értelme van, tehát $x+y+z \neq 0$; továbbá hogy az osztásokat elvégezhetjük, vagyis hogy (4), (5) és (6) egyik oldala sem 0, tehát $a+b-c, -a+b+c, c+a-b$ és x, y, z 0-tól különbözők. Most megvizsgáljuk, mi a helyzet, ha ezek között egy vagy több 0 érték lép fel.

Tegyük fel, hogy pl. $a+b-c=0$. Ekkor (6) szerint $t = xy/(x+y+z) = 0$, tehát x és y közül legalább az egyik, és így r és s közül, s velük együtt $-a+b+c$ és $a-b+c$ közül is legalább az egyik 0. Legyen $-a+b+c=0$, de $a-b+c \neq 0$, így összeadással $2b=0, b=0$, ebből egyrészt $a-c=0$, másrészt $a+c \neq 0$, tehát $a=c \neq 0$. Másrészt $s \neq 0, r=t=0$, tehát $y=0, xz \neq 0$. Ezért (1) és (3) azonossá válnak:

$$(10) \quad \frac{xz}{x+z} = a,$$

és ennek számtalan sok megoldása van: bármely a 0-tól különböző v számmal megoldás a következő számhármassal:

$$(11) \quad x = v, \quad y = 0, \quad z = \frac{av}{v-a}.$$

Ha pedig $a+b-c = -a+b+c = a-b+c = 0$, akkor mindhármat összeadva $a+b+c=0$, tehát $a=b=c=0$. Ebből következik, hogy bármely $0, 0, v$ számhármassal, ahol $v \neq 0$, bármely sorrendben megoldása a rendszernek. Ugyanis pl.

(2)-ből vagy $y = 0$ és $z + x \neq 0$ (mert ha még $z + x = 0$ is áll, akkor $x + y + z = 0$, tehát az egyenletrendszernek nincs értelme), vagy pedig $z + x = 0$ és $y \neq 0$. Az első eset ismét (10)-re vezet, de $a = 0$ -val, tehát $xz = 0$, és így $z = v \neq 0$ választással $x = 0$. A második esetben pedig (1) és (3) különbségét véve $(x - z)y = 0$, tehát $x - z = x + z = 0$, amiből $x = z = 0$, $y \neq 0$.

Tekintsük végül annak lehetőségét, hogy $x + y + z = 0$ (feltéve természetesen, hogy (4), (5) és (6) jobb oldala 0-tól különböző). x , y és z közös számlálóját K -val jelölve és kiemelve (7)–(9)-ből

$$x + y + z = \frac{K}{2} \left(\frac{1}{-a + b + c} + \frac{1}{a - b + c} + \frac{1}{a + b - c} \right).$$

A zárójelben közös nevezőre hozással a számláló

$$\begin{aligned} [a^2 - (b - c)^2] + [b^2 - (c - a)^2] + [c^2 - (a - b)^2] = \\ = 2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2 = K, \end{aligned}$$

eszerint $x + y + z = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $K = 0$.

Összefoglalva: ha $K = 0$, akkor a rendszernek nincs értelme. Tovább $b + c - a$, $c + a - b$ és $a + b - c$ értéke vizsgálandó.

Ha egyikük sem 0, akkor a megoldást (7), (8) és (9) adja: x , y , z egyike sem 0;

ha közülük pontosan egy 0, akkor nincs megoldás;

ha kettő 0 (ez az eset könnyebben felismerhető abból, hogy a , b , c egyike 0 és a másik kettő egyenlő, de 0-tól különböző), akkor végtelen sok megoldás van, a megoldás típusát (11) adja, x , y , z közül pontosan egynek értéke 0;

ha pedig mindhárom 0, (ez az eset könnyebben felismerhető arról, hogy $a = b = c = 0$), akkor is végtelen sok megoldás van, x , y , z közül pontosan kettő 0, a harmadik pedig (és ez bármelyikük lehet) tetszős szerinti 0-tól különböző szám.

Nagy Csaba (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

b) Egész megoldások keresése. Egész x , y , z -t eredményező a , b , c , számhármassokat úgy kapunk, hogy a megválasztott x , y , z -ből (1)–(3) alapján a , b , c -t kiszámítjuk. (Nem lehet azonban $x + y + z = 0$.) Bár a feladat ezt nem írja elő, ilyen tulajdonságú egész a , b , c számhármassokat is kaphatunk. Ugyanis az előbbieket szerint számított a , b , c nevezője, esetleges egyszerűsítés előtt, $x + y + z$. Mármost x , y , z helyére az $x' = x(x + y + z)$, $y' = y(x + y + z)$, $z' = z(x + y + z)$ számhármast véve az (1)–(3)-beli számlálók $(x + y + z)^2$ -szeresei, a nevezők $(z + y + z)$ -szeresei az előbbieknél, így a , b , c helyére $x + y + z$ -szeresei, vagyis egész számok lépnek.

Csipka László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A gyökök (7)–(9) kifejezései a diszkusszióra célszerűek. Kiszámításuk azonban könnyebb a következő alakokból

$$\begin{aligned} x &= \frac{2bc}{b + c - a} - \frac{b + c - a}{2}, & y &= \frac{2ca}{c + a - b} - \frac{c + a - b}{2}, \\ z &= \frac{2ab}{a + b - c} - \frac{a + b - c}{2}. \end{aligned}$$

Felszeghy Tamás (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. III. o. t.)

2. Egyszerűbb eljárást adhatunk K vizsgálata helyett is. Tekintsük $K = 0$ -t egyenletnek a -nak b és c -ből való kiszámítására.

$$(12) \quad K = -a^2 + 2(b + c)a - (b - c)^2 = 0\text{-ből}$$

$$(13) \quad a_1 = b + c + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2, \quad a_2 = b + c - 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2,$$

tehát a gyöktényező alak alapján, majd $a = (\sqrt{a})^2$ -nel a négyzetek különbségét szorzattá alakítva

$$\begin{aligned} K &= -[a - (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2][a - (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2] = \\ (14) \quad &= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}). \end{aligned}$$

Itt egyelőre feltettük, hogy a , b , c egyike sem negatív. De (13) első kifejezései akkor is valós számok, ha b , c negatív, és ekkor a_1 , a_2 is negatív, eszerint (14)-ben a , b , c helyett abszolút értékük veendő. Könnyű belátni máshogy is, hogy ha a , b , c között vannak ellentett jelűek akkor $K \neq 0$. Valóban, ekkor a , b , c közül vagy pontosan egy, vagy pontosan kettő negatív, és elég a következő eseteket tekinteni:

$$\text{I. } a < 0; b, c > 0 \quad \text{II. } a > 0; b, c < 0 \text{ (} b \text{ és } c \text{ egyike 0 is lehet).}$$

Egyik esetben sincs (12) bal oldalán pozitív tag, de negatív van, tehát $K < 0$.

Azt nyertük, hogy K -t elég akkor vizsgálni, ha a , b , c között nincs két ellentett jelű szám. És (14) szerint K akkor és csak akkor 0, ha a , b , c abszolút értékeinek pozitív négyzetgyökei közül valamelyik egyenlő a másik kettő összegével. (Pl. $a = 1$, $b = 4$, $c = 9$ esetén $K = 0$.)